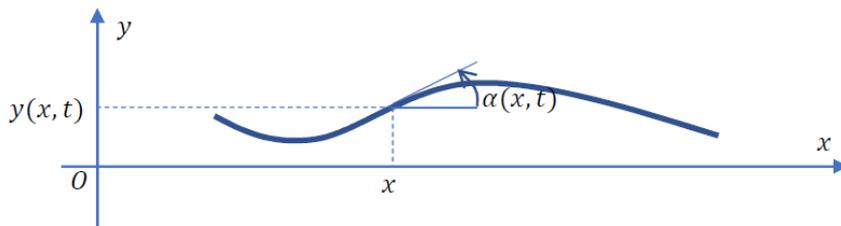


## PREMIER sujet commun PSI/PSI\* : Corde vibrante

On considère une corde sans raideur (n'opposant aucune résistance à la déformation), de masse linéique  $\mu$  et tendue à la tension  $T_0$  lorsqu'elle est au repos. On néglige le poids de la corde par rapport à la tension du fil et on s'intéresse aux petits mouvements verticaux de la corde (les calculs seront tous faits de manière approchée, au premier ordre en  $\frac{\partial y}{\partial x}$ ). Un point  $M$ , situé à l'abscisse  $x$  lorsque la corde est au repos, s'est déplacé de  $y(x, t)$  selon  $Oy$  :



Chaque élément de la corde est soumis à des forces de tension tangentes en tout point à la corde. On note  $\vec{T}(x, t)$  la tension qu'exerce à un instant  $t$  la partie de la corde d'abscisse supérieure à  $x$  sur la partie de la corde d'abscisse inférieure à  $x$ . On note  $\alpha(x, t)$  l'angle que fait la tangente à la corde au point  $x$  à l'instant  $t$  avec l'horizontale.

Les deux grandeurs suivantes permettent de décrire les phénomènes de propagation le long de la corde :

$$\begin{cases} v(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \\ T_y(x, t) = T_0 \alpha(x, t) = T_0 \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \end{cases}$$

- 1) Montrer **soigneusement** que l'on peut établir deux relations de couplage liant les dérivées spatiales et temporelles de ces deux grandeurs.
- 2) Dédire de ces deux relations l'équation d'onde le long de la corde ; mettre en évidence une célérité  $c$  ( $c > 0$ ) et l'exprimer en fonction des données.

On considère une onde plane progressive telle que  $y_+(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$

- 3) Donner, en la justifiant, une interprétation de la célérité  $c$ . Dans quel sens se propage cette onde ?
- 4) On définit l'impédance de la corde par la relation

$$T_{y_+}(x, t) = -Zv_+(x, t)$$

Exprimer  $Z$  en fonction des caractéristiques du problème.

- 5) Soit l'onde progressive  $y_-(x, t)$  ; quel est alors le lien entre  $T_{y_-}(x, t)$  et  $v_-(x, t)$  ?
- 6) On donne les expressions suivantes pour l'énergie linéique de la corde,

$$e = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

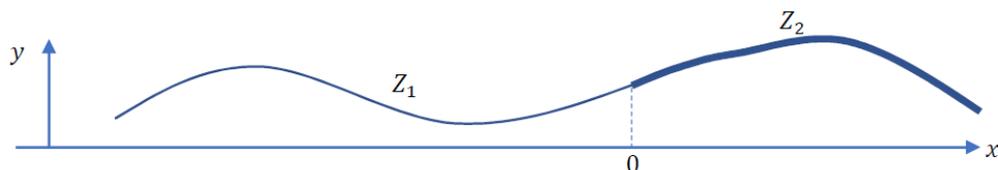
et pour la puissance transférée le long de la corde,

$$R = -T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

Donner une justification de l'expression de chacune de ces deux quantités.

- 7) Montrer que :  $\left(\frac{\partial e}{\partial t}\right) = -\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)$  ; donner une interprétation physique de cette relation ; indiquer dans quel(s) autre(s) domaine(s) de la physique vous avez rencontré de telles relations.

On considère deux cordes semi-infinies : la première, d'impédance  $Z_1$ , s'étend de  $x = -\infty$  à  $x = 0$ , la seconde, d'impédance  $Z_2$ , s'étend de  $x = 0$  à  $x = +\infty$ .



Une onde incidente est envoyée dans la première corde. Cette onde est associée à une déformation fixée par la fonction  $y_i(x, t)$ . En  $x = 0$ , cette onde incidente donne naissance à une onde réfléchie dans la première corde et une onde transmise dans la seconde corde. L'amplitude de l'onde réfléchie est donnée par la fonction  $y_r(x, t)$  et l'amplitude de l'onde transmise par la fonction  $y_t(x, t)$ . On note  $r_y$  le coefficient de réflexion en amplitude, défini par  $y_r(0, t) = r_y y_i(0, t)$  et on note  $t_y$  le coefficient de transmission en amplitude, défini par  $y_t(0, t) = t_y y_i(0, t)$ .

- 8) Montrer que  $1 + r_y = t_y$ .
- 9) Montrer que  $Z_1(r_y - 1) = -Z_2 t_y$ .
- 10) En déduire les coefficients  $r_y$  et  $t_y$ .
- 11) En utilisant la question 6), définir les coefficients de réflexion et de transmission en énergie de l'onde que l'on notera R et T ; calculer ces coefficients en fonction de  $Z_1$  et  $Z_2$  ; quelle relation les lie ? Comment la justifier physiquement ?
- 12) Tracer R(z) et T(z), où z est la variable  $z = \frac{Z_2}{Z_1}$  ; commenter les allures correspondantes.

On considère l'onde incidente suivante :



- 13) Dessiner l'allure de l'onde réfléchie dans les cas  $Z_1 \ll Z_2$  et  $Z_1 \gg Z_2$  ; peut-on réaliser expérimentalement chacun de ces deux cas, et si oui comment ?
- 14) Vérifier la cohérence de vos résultats dans le cas où  $Z_1 = Z_2$ .
- 15) La corde est maintenant fixée à ses deux extrémités ; elle a une longueur L en plus de ses autres caractéristiques. Son comportement est toujours régi par l'équation trouvée à la question 2.

On cherche des solutions sous la forme  $y_n(x, t) = Y_{n,0} \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$

- a. Déterminer la (les) valeur(s) possible(s) de  $k_n$ .
- b. Quelle relation lie  $k_n$  et  $\omega_n$  ?
- c. Après avoir lu attentivement les documents 1 et 2, répondre aux questions suivantes :

Justifier les affirmations (I1), (I2) et (I3) du **document 1**.

À partir du **document 2**, donner, à un même instant, la représentation graphique de l'allure de la corde pour les 3 modes impairs dont l'amplitude est la plus importante.

Déduire des **documents 1 et 2**, en explicitant votre démarche, quelle corde a été excitée.

## Document 1 - La guitare : les grandes idées

### Tension

La guitare est un instrument fragile, constituée d'éléments dissemblables dans leur composition (bois, métal, nylon) qui supportent des efforts physiques importants :

- tension qui s'exerce sur les cordes quand elles vibrent
- traction des cordes pour le manche (en accordage standard, la tension de chaque corde représente un poids d'environ cinq à quinze kilogrammes)
- chocs permanents puisque l'instrument est par essence « nomade ».

### Accordage

Les guitares à 6 cordes sont généralement accordées (du grave à l'aigu) avec les notes :

Corde	1	2	3	4	5	6
Note	Mi <sup>1</sup>	La <sup>1</sup>	Ré <sup>2</sup>	Sol <sup>2</sup>	Si <sup>2</sup>	Mi <sup>3</sup>
Fréquence (Hz)	82,40	110,0	146,8	196,0	246,9	329,6

Cette combinaison de notes est appelée *accordage standard*

### Modes de vibration

Considérons une corde maintenue par ses deux extrémités. Dans le mode de vibration le plus simple, dit « fondamental », elle forme à chaque instant un arc et la flèche de cet arc varie de manière périodique (la courbure augmente, puis diminue, puis s'inverse, puis augmente dans l'autre sens...). On peut donc définir une fréquence de vibration et l'on remarque que cette fréquence dépend :

- de la masse linéique de la corde (notée  $\mu$  et exprimée en kilogrammes par mètre) ;
- de la force avec laquelle on tend cette corde (tension notée  $T_0$  et exprimée en newtons) ;
- de la longueur de la corde (notée  $L$  et exprimée en mètres).

Si l'on cherche l'influence de chaque paramètre :

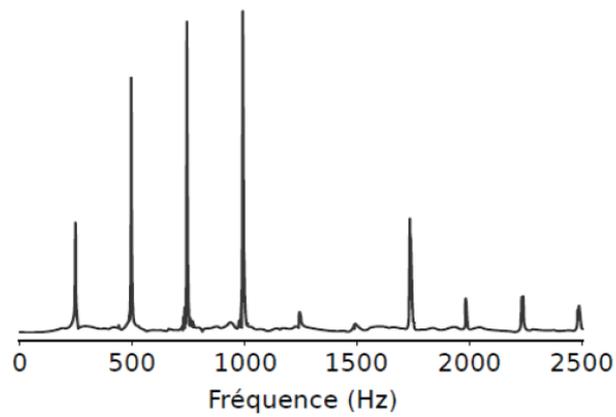
- (I1) plus la corde est légère ( $\mu$  est faible), plus la fréquence est élevée (c'est la raison pour laquelle les cordes aiguës d'un instrument sont plus fines) ;
- (I2) plus la corde est tendue, plus la fréquence de vibration est élevée (d'un point de vue acoustique, la note s'élève lorsqu'on tend la corde) ;
- (I3) plus la corde est longue, plus la fréquence est basse (et donc, pour un instrument, plus le son est grave).

Sur un instrument, chaque corde a une masse linéique différente et l'on ajuste la tension pour accorder. Pour jouer, on joue sur le choix de la corde et lorsque l'instrument a un manche, sur la longueur de la corde en pinçant la corde contre le manche avec le doigt.



## Document 2 - La guitare : résultats expérimentaux et données techniques

Le son produit par une seule corde de guitare a été enregistré. On donne sur la **figure 2** le spectre (obtenu par décomposition en série de Fourier) du signal proportionnel à l'amplitude de vibration de la corde :



**Figure 2** - Spectre du signal électrique proportionnel à l'amplitude de la corde

Les cordes sont en nylon de masse volumique  $1\,140\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , de mêmes longueurs 63 cm et de diamètres différents reportés dans le tableau ci-dessous :

Corde	1	2	3	4	5	6
Diamètre (mm)	1,07	0,81	0,61	0,41	0,25	0,23

Source 2016 : Wikipédia

### Centrale PC 2023, extrait

## II Redéfinition du kelvin

la partie II.A a été supprimée.

### II.B – Méthode de la thermométrie acoustique à gaz

La méthode de la thermométrie acoustique à gaz est celle qui a donné les résultats les plus précis pour la mesure de la constante de Boltzmann avant 2018.

on rappelle le lien entre la constante des gaz parfaits  $R$  et la constante de Boltzmann  $k_B$ .

$$R = N_A \cdot k_B$$

Nous allons étudier la propagation des ondes sonores dans un gaz. Dans un premier temps on se limite au cas d'une propagation unidimensionnelle suivant l'axe  $(Ox)$ . L'écoulement est supposé parfait et l'influence de la pesanteur est négligée. Au repos, les champs de masse volumique  $\mu_0$  et de pression  $p_0$  sont uniformes et le champ des vitesses est nul. On note  $p_1$ ,  $\mu_1$  et  $v_1$  les écarts à ces valeurs de repos. On appelle  $\chi_S$  le coefficient de compressibilité isentropique. On se place dans le cadre de l'approximation acoustique.

**Q 24.** Rappeler la signification de cette approximation.

**Q 25.** Donner l'équation d'Euler et la linéariser.

**Q 26.** Rappeler l'équation de conservation de la masse et la linéariser.

**Q 27.** À partir de la définition de  $\chi_S$ , obtenir une relation entre  $\mu_1$  et  $p_1$ .

**Q 28.** Établir l'équation de propagation pour la surpression  $p_1$ . Comment s'exprime la célérité  $c_s$  des ondes sonores ?

**Q 29.** En supposant que le gaz est parfait et que le coefficient adiabatique  $\gamma$  est constant, établir la nouvelle expression de la célérité  $c_s$  en fonction de  $T$ . Faire l'application numérique pour de l'air à  $T = 300$  K.

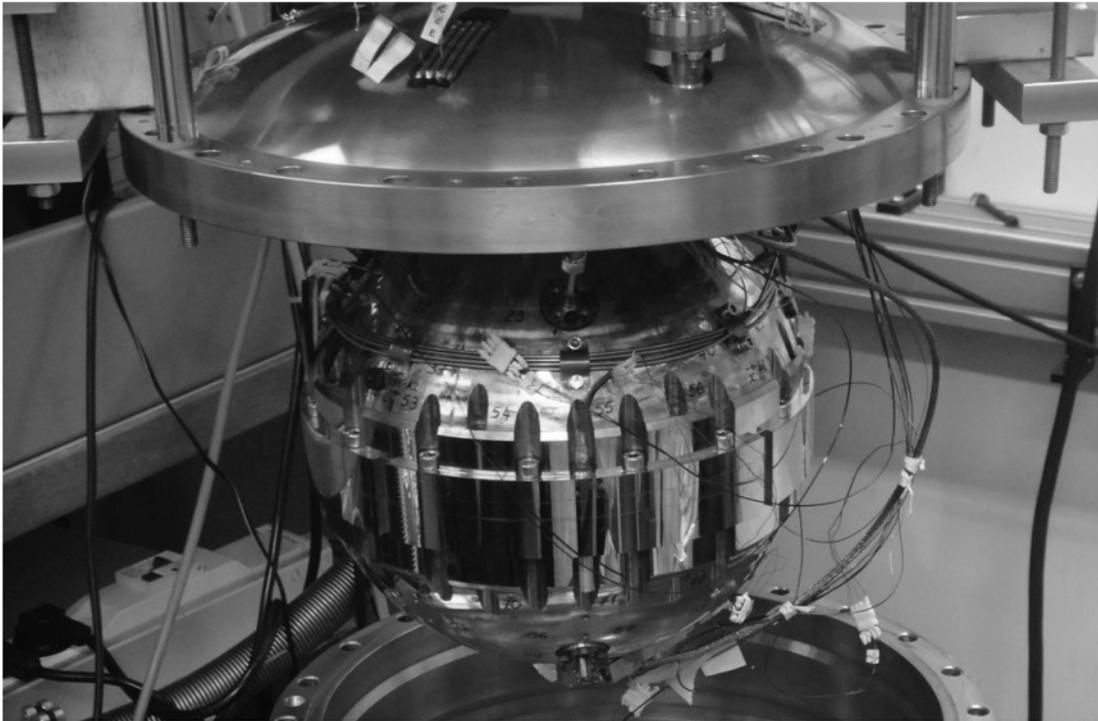
Pour mesurer  $c_s$ , on peut utiliser les modes propres d'une sphère creuse et une mesure précise du rayon  $r_s$  de cette sphère. C'est le dispositif mis en œuvre au LNE (figure 4).

**Q 30.** Au LNE, le gaz utilisé est un gaz rare tel que l'hélium ou l'argon. Calculer la valeur numérique de  $c_s$  pour l'hélium à la température du point triple de l'eau.

**Q 31.** Comment peut-on déduire de la mesure de  $c_s$  et de la relation établie à la question 29, une valeur pour la constante de Boltzmann ?

**Q 32.** On cherche à résoudre l'équation de propagation pour la surpression  $p_1$  dans le cas de la sphère. Que devient cette équation dans le cas général ?

**Q 33.** Montrer que, en l'absence de dépendance angulaire, les fonctions solutions  $r p_1(r, t)$  peuvent se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire de deux termes. Donner la signification physique de chacun des termes.



**Figure 4** Résonateur quasi sphérique utilisé par l'équipe du LNE-CNAM (Laboratoire National de métrologie et d'Essais - Conservatoire National des Arts et Métiers) pour mesurer la constante de Boltzmann par thermométrie acoustique. Le résonateur, de volume intérieur  $D \approx 3,1$  L, est rempli de gaz rare (hélium ou argon) et placé dans un cryostat pour maintenir sa température constante.

**Q 34.** Pourquoi peut-on se limiter à l'étude des solutions de la forme, en notation complexe,

$$p_{-1}(r, t) = \frac{A}{r} \exp(i(\omega t - kr)) + \frac{B}{r} \exp(i(\omega t + kr)),$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $\omega$  et  $k$  sont des constantes ?

**Q 35.** En déduire le champ des vitesses correspondant, en fonction de  $A$ ,  $B$ ,  $\omega$ ,  $k$  et  $r$ .

**Q 36.** Vers quoi tend le débit volumique à travers une sphère de rayon  $r$  quand  $r$  tend vers 0 ? Que peut-on en déduire ?

**Q 37.** Établir l'équation vérifiée par les modes propres.

**Q 38.** Montrer qu'il y a une fréquence de résonance  $f_n$  par intervalle  $\left[2n \frac{c_s}{4r_s}, (2n + 1) \frac{c_s}{4r_s}\right]$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $r_s$  le rayon de la sphère. Pour  $n \gg 1$ , exprimer de façon approchée  $f_n$ .

**Q 39.** Calculer approximativement la fréquence du mode fondamental pour la sphère du LNE.

# Données et formulaire

## Valeurs numériques

toutes ne sont pas utiles

Charge électrique élémentaire

$$e \approx 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Constante de Planck

$$h \approx 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

Constante de Boltzmann

$$k_B \approx 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$$

Constante d'Avogadro

$$N_A \approx 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Célérité de la lumière dans le vide

$$c \approx 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé

$$\Delta\nu_{\text{Cs}} \approx 9,19 \times 10^9 \text{ Hz}$$

Masse de l'électron

$$m_e \approx 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

Accélération de la pesanteur à Paris

$$g \approx 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Température du point triple de l'eau

$$T \approx 273,16 \text{ K}$$

Masse molaire de l'hélium

$$M_{\text{He}} \approx 4,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Masse molaire de l'azote

$$M_{\text{N}} \approx 14 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Masse molaire de l'oxygène

$$M_{\text{O}} \approx 16 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

## Formulaire

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

En coordonnées cylindriques

$$\text{div } \vec{a}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial (ra_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(r, \theta, z) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (ra_r)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

En coordonnées sphériques

$$\Delta f(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

## Définition de la seconde

On pose  $\Delta\nu_{\text{Cs}} = 9\,192\,631\,770 \text{ s}^{-1}$ , ce qui permet de définir la seconde qui correspond donc à la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé.

---

• • • FIN • • •

---

## Devoir surveillé de Sciences Physiques n°5 du 10-02-2024

SUJET SPECIFIQUE PSI

### Problème 3 – Fabrication d’un miroir de télescope

*Centrale TSI 2016*

Q1 on pourra juste donner le nombre d’électrons de valence

Pour Q7 on se réfèrera à l’indication à la fin du texte. Q12 a été supprimée.

#### A. Structure de la matière et structure cristalline du $\beta$ – SiC

Aide pour les calculs numériques :  $\ln 10 = 2,3$  et  $\ln 20 = 3$ .

Le carbure de silicium, de formule SiC, a été découvert par JÖNS JACOB BERZELIUS en 1824 lors d’une expérience pour synthétiser du diamant. Il est devenu un matériau incontournable pour la fabrication d’instruments optiques nécessitant une stabilité thermodynamique importante. Les technologies actuelles permettent de réaliser des instruments constitués uniquement de SiC, que ce soient les miroirs, la structure ou les supports de détecteurs. En particulier, la face optique des miroirs peut être revêtue de SiC par dépôt chimique en phase vapeur (ou CVD pour l’anglais *chemical vapor deposition*) afin de masquer toute porosité résiduelle et obtenir une surface polissable parfaite. Par exemple le télescope spatial infrarouge HERSCHEL, lancé en 2009 et développé par l’agence spatiale européenne (ESA), opérationnel entre 2009 et 2013, emportait un miroir primaire de 3,5 m de diamètre, le plus grand miroir de l’espace, constitué de 12 segments en carbure de silicium fritté, assemblés par brasage.

1. Le numéro atomique du carbone est  $Z_C = 6$ . Donner sa configuration électronique dans l’état fondamental.
2. Le silicium Si est situé juste en-dessous du carbone dans le tableau périodique. Quel est son numéro atomique ?
3. Que peut-on dire des propriétés chimiques respectives du carbone et du silicium ?

Le carbure de silicium présente de très nombreuses structures cristallines. Celle utilisée dans la fabrication de miroirs est la phase  $\beta$  ou  $3C$  – SiC. La figure 1 représente la maille conventionnelle du  $\beta$  – SiC ainsi que son contenu. Les atomes de silicium, en gris, occupent les positions d’une structure cubique à faces centrées ; les atomes de carbone, en noir, occupent un site tétraédrique sur deux en alternance.

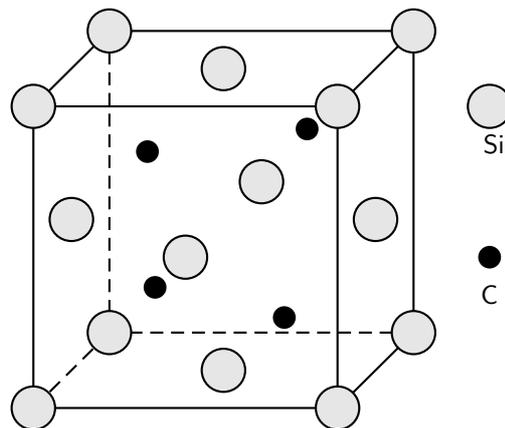


FIGURE 1 – Maille conventionnelle  $\beta$  – SiC

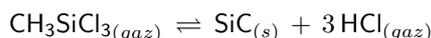
4. Dénombrer le nombre d’atomes de carbone et de silicium contenus en propre dans la maille et conclure.

## B. Formation de SiC par CVD

Le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) est un procédé utilisé pour produire des matériaux solides de grande pureté et sous forme de couches minces. Dans ce procédé, un solide inerte servant de support est exposé à un ou plusieurs composés chimiques en phase gazeuse qui se décomposent à sa surface pour former le matériau désiré. Généralement, plusieurs réactions se produisent conjointement, les produits des réactions indésirables étant évacués par un flux gazeux traversant en continu la chambre réactionnelle. De nombreux composés chimiques sont utilisés pour produire des films minces de SiC. Parmi ceux-ci, le méthyltrichlorosilane MTS  $\text{CH}_3\text{SiCl}_3$  est très souvent choisi. La réaction se déroule sur un solide en graphite, à une température de l'ordre de  $1\,000\text{ °C}$  et sous pression réduite. Elle se déroule dans un courant de dihydrogène et, d'un point de vue microscopique, en deux étapes :

- une décomposition du MTS en présence de dihydrogène pour former des produits intermédiaires gazeux ;
- puis une réaction entre ceux-ci pour former le carbure de silicium solide.

L'équation-bilan globale de réaction s'écrit :



On donne dans le tableau qui suit les enthalpies standard de formation à  $T_0 = 298\text{ K}$  de ces trois espèces. On se placera dans le cadre de l'approximation d'ELLINGHAM, c'est-à-dire que l'on considérera que ces enthalpies standard ne dépendent pas de la température. Tous les gaz sont supposés parfaits et on prendra comme valeur de constante des gaz parfaits  $R = 8,314\text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Composé	$\text{CH}_3\text{SiCl}_3(\text{gaz})$	$\text{SiC}(\text{s})$	$\text{HCl}(\text{gaz})$
$\Delta_f H^\circ (\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$	-529	-73	-92

5. Calculer l'enthalpie standard de la réaction.

6. Que peut-on déduire du signe de cette grandeur ? En déduire le sens de variation de la constante d'équilibre thermodynamique de la réaction avec la température  $T$ .

7. La constante d'équilibre thermodynamique de la réaction à  $T_0$  vaut  $K^\circ(T_0) \simeq 10^{-20}$ . Déterminer la valeur de la température  $T_1$  pour laquelle  $K^\circ(T_1) = 10$ .

On se placera désormais à cette température. On considère une enceinte vide, thermostatée à la température  $T_1$ , dans laquelle on introduit une quantité  $n = 1,0\text{ mol}$  de MTS. On définit le taux de décomposition  $\alpha$  du MTS par le quotient de la quantité de MTS ayant réagi sur la quantité initiale de MTS introduite. La pression dans l'enceinte est fixée à  $p = p^\circ = 1\text{ bar}$ .

8. Exprimer le quotient réactionnel  $Q_r$  de la réaction en fonction des pressions partielles des espèces gazeuses présentes dans le milieu réactionnel et de la pression standard  $p^\circ$ .

9. Exprimer les quantités de matière des différentes espèces présentes en fonction de  $n$  et  $\alpha$ .

10. Déterminer l'expression permettant de calculer le taux d'avancement  $\alpha_{eq}$  à l'équilibre. La valeur obtenue est  $\alpha_{eq} = 0,80$ .

11. Calculer le transfert thermique  $Q$  échangé par l'enceinte au cours de la réaction.

On considère maintenant une enceinte vide, de volume constant, thermostatée à la température  $T_2 = 1\,200\text{ K}$ , dans laquelle, à la date  $t = 0$ , on introduit une quantité  $n$  de MTS. Pour cette température, la réaction de formation de carbure de silicium peut être considérée comme totale. La figure 2 représente l'évolution de la concentration de MTS dans l'enceinte, pour différentes quantités  $n$  introduites, au cours du temps.

13. Déterminer le temps de demi-réaction  $t_{1/2}$  pour chacune de ces trois expériences. Que peut-on en déduire concernant l'ordre par rapport au MTS ?

14. On notera  $k$  la constante de vitesse de la réaction. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la concentration en MTS ?

15. Exprimer la concentration en MTS dans l'enceinte au cours du temps, en fonction de la concentration initiale  $[\text{MTS}]_0$ , du temps et de la constante de vitesse  $k$ .

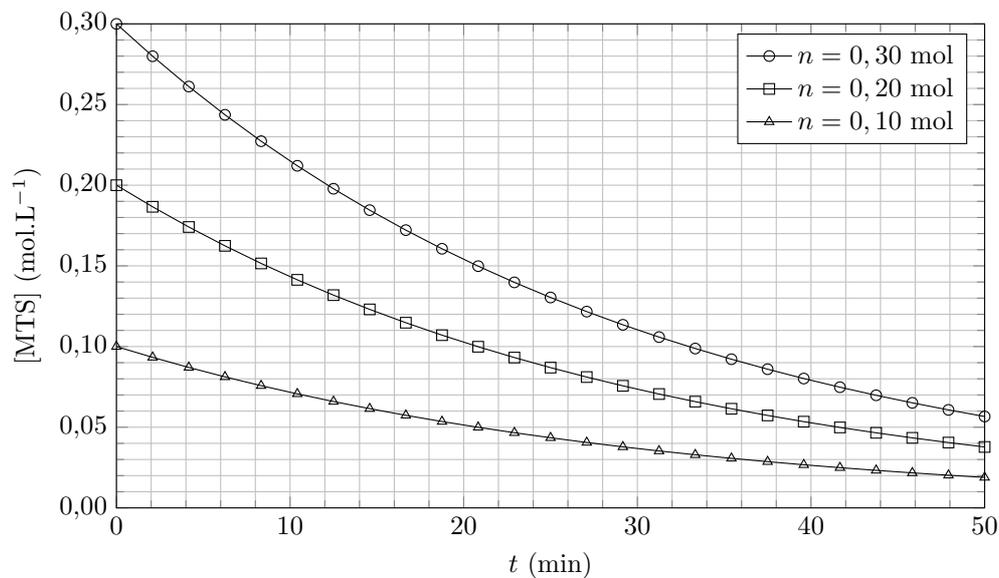


FIGURE 2 – Cinétique de décomposition du MTS

16. Exprimer le temps de trois-quarts de réaction  $t_{3/4}$  en fonction de  $k$ .

17. Que vaut le rapport  $\frac{t_{3/4}}{t_{1/2}}$  ? Ceci est-il vérifié dans le cas présent ?

18. Une augmentation de la température de 100 K pour atteindre  $T_3 = 1300$  K entraîne une diminution du temps de demi-réaction d'un facteur 20. Rappeler la loi d'ARRHÉNIUS exprimant la loi  $k(T)$  et déterminer l'énergie d'activation.

19. La réaction se déroule toujours dans la pratique à 1000 °C, sous pression réduite et en présence de dihydrogène dans un réacteur ouvert. En vous aidant de vos connaissances et des résultats du problème, justifier ces conditions opératoires en précisant en particulier pourquoi il est nécessaire de maintenir une température constante pour obtenir un film mince de haute qualité.

on ne répondra que vis à vis de la l'influence de la température.

On donne la loi de van't Hoff exprimant la variation de la constante d'équilibre avec la température. On se place dans l'approximation d'Ellingham.

$$\frac{d \ln K^o(T)}{dT} = \frac{\Delta_r H^o}{RT^2}$$

Sujet spécifique PSI\*

PROBLEME SUPPLEMENTAIRE

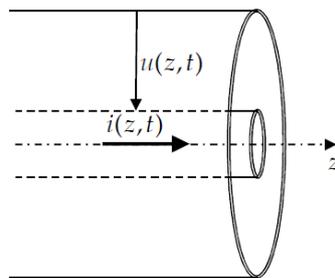
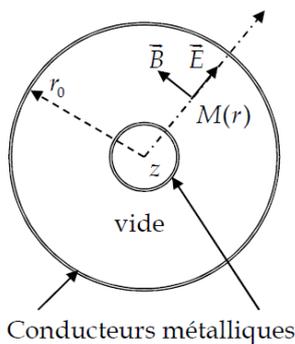
Réalisation de milieux continus à l'aide de composants discrets  
D'après X-ENS PSI 2009

Les progrès de la miniaturisation permettent de réaliser des milieux aux propriétés inhabituelles. Ces milieux sont réalisés par association de composants discrets dont les dimensions dépendent des progrès technologiques et des applications. Il s'agit d'étudier les conditions permettant d'assimiler l'ensemble des composants discrets à un milieu continu

On pose  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  avec la célérité de la lumière dans le vide :  $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$  et la perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

A) Propagation dans un câble coaxial sans pertes

1) Ecrire les équations de Maxwell dans le vide et en déduire les équations de propagation du champ électrique et du champ magnétique. Déterminer la relation que doivent vérifier  $k$  et  $\omega$  pour les solutions progressives sinusoïdales  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kz)}$ .



On rappelle que :  
 $\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \text{grad}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta(\vec{A})$ ,  
pour un champ de vecteur  $\vec{A}$  quelconque.

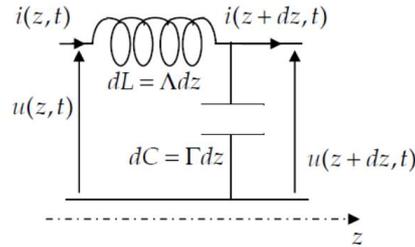
2) On désire maintenant étudier la propagation dans un câble coaxial. Le câble est constitué de deux cylindres réalisés en conducteur que l'on considérera parfait. Le milieu entre les conducteurs est assimilé au vide. On cherche une solution du problème sous la forme  $\vec{E} = E_0 \frac{r_0}{r} e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_r$  et  $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \frac{r_0}{r} e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_\theta$ , avec  $k = \frac{\omega}{c}$ .

Appliquer le théorème de Gauss pour une surface de Gauss cylindrique d'axe Oz de hauteur h et de rayon r ; en déduire la charge intérieure à ce cylindre.

Appliquer le théorème d'Ampère pour un contour d'Ampère circulaire d'axe Oz et de rayon r ; en déduire l'intensité enlacée correspondante.

3) On fait intervenir l'intensité du courant électrique parcourant le conducteur intérieur  $i(z,t)$  et la tension entre le conducteur intérieur et le conducteur extérieur  $u(z,t)$ . On pose  $\vec{i} = \alpha E_0 e^{j(\omega t - kz)}$ , déterminer  $\alpha$ . On admettra que  $\vec{u} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \vec{i}$ . Quelle équation aux dérivées partielles est vérifiée par l'intensité et la tension ?

4) On désire représenter la propagation dans le câble par une ligne à constantes réparties :



Montrer que la représentation du problème sous la forme d'une ligne à constantes réparties permet d'obtenir la même solution qu'à la question précédente si certaines conditions sont vérifiées par les paramètres  $\Lambda$  inductance par unité de longueur et  $\Gamma$  capacité par unité de longueur. On exprimera  $\Lambda$ ,  $\Gamma$  en fonction de  $\epsilon_0, \mu_0$ .

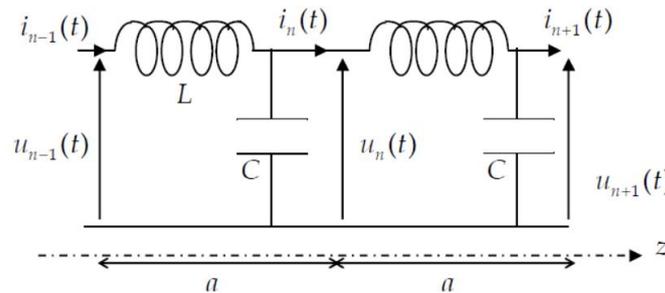
Pour cela, on utilisera notamment l'impédance caractéristique du câble  $R_C = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$ .

5) La valeur efficace de l'intensité de l'onde progressive sinusoïdale  $\underline{i} = \sqrt{2}I_0 e^{j(\omega t - kz)}$  est notée  $I_0 = |\underline{i}|_{\text{efficace}}$ .

Calculer la puissance moyenne,  $P_{EM_L}$  transmise dans le câble à l'abscisse  $z$  en fonction de  $\Lambda$ ,  $\Gamma$ ,  $I_0$ . Dans quelle direction est transmise la puissance pour une onde se propageant suivant les  $z$  croissants ?

6) Calculer l'énergie moyenne par unité de longueur de la ligne lors de la propagation de l'onde progressive sinusoïdale  $w_{EM_L}$ . Que représente la grandeur  $\frac{P_{EM_L}}{w_{EM_L}}$  ?

7) On désire reproduire à l'aide de composants discrets un circuit dont les tensions et les intensités ont approximativement les mêmes valeurs dans l'espace et dans le temps. On réalise des cellules de base composées d'une inductance et d'un condensateur. Chacune de ces cellules est de longueur  $a$ . On les place en chaîne comme sur le schéma.

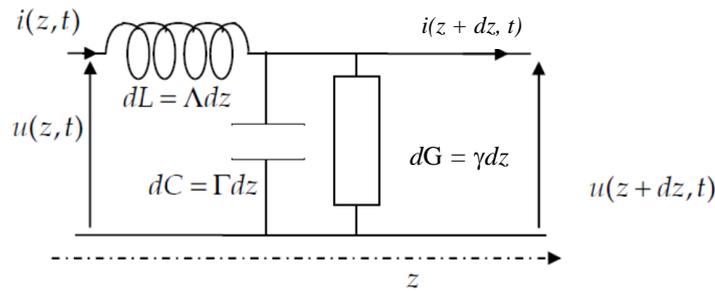


- Trouver la relation liant  $u_{n-1}(t)$ ,  $u_n(t)$ ,  $u_{n+1}(t)$  et  $\frac{d^2 u_n(t)}{dt^2}$ .
- A quelle condition sur  $\omega$ ,  $k$ ,  $a$  et  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  les fonctions de la forme  $U_0 e^{j(\omega t - kna)}$  sont-elles solutions de l'équation précédente ?
- Soit  $\lambda$  la longueur d'onde associée à  $k$  ; on veut que les solutions soient identiques à celles de la ligne à constantes réparties. Montrer que cela est possible si  $\lambda \gg a$  et en écrivant une relation liant  $L$ ,  $a$  et  $\Lambda$  d'une part et une relation liant  $C$ ,  $a$  et  $\Gamma$  d'autre part.

8) On dispose de composants de dimensions de l'ordre du centimètre, quels types d'ondes peut-on faire se propager sans dispersion notable ? Même question pour des composants de l'ordre de la dizaine de micromètre ?

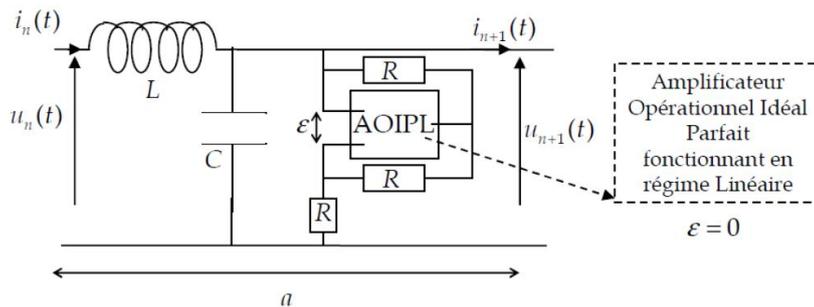
## B) Atténuation et amplification des ondes électromagnétiques

9) Pour prendre en compte les pertes énergétiques lors de la propagation, on complète la représentation de la ligne à constantes réparties grâce à une conductance  $dG$  placée en parallèle du condensateur.



- Donner l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction  $u(z, t)$ .
- En déduire la relation de dispersion associée à la propagation d'une OPPM de la forme  $U_0 \exp([j(\omega t - \underline{k}z)]$ , avec  $\underline{k} = k' - jk''$ , où  $k'$  et  $k''$  sont réels.
- Montrer que les ondes progressives selon les  $z$  croissants sont atténuées si  $\gamma$  est positif. Quels sont les signes de  $k'$  et  $k''$  ?

10) *Amplification* - On considère la cellule ci-dessous :



- Donner un schéma électrocinétique équivalent à la branche constituée de l'AOIPL et des trois résistances  $R$ .
- En utilisant les résultats de la question 7), donner une modélisation à constantes réparties de la ligne constituée de l'enchaînement de ces cellules ; on introduira une conductance linéique négative que l'on notera  $\chi$ .
- En déduire qu'une onde progressive amplifiée, de la forme  $U_0 e^{\frac{z}{l_c}} e^{j(\omega t - k'z)}$  où  $l_c$  et  $k'$  sont des grandeurs positives, peut se propager suivant les  $z$  croissants.

11) Connaissez-vous des dispositifs où l'on utilise une amplification pour des ondes électromagnétiques de longueur d'onde proche du micromètre ?

Dans la question suivante, on supposera  $l_c \gg \lambda = 2\pi/k'$ .

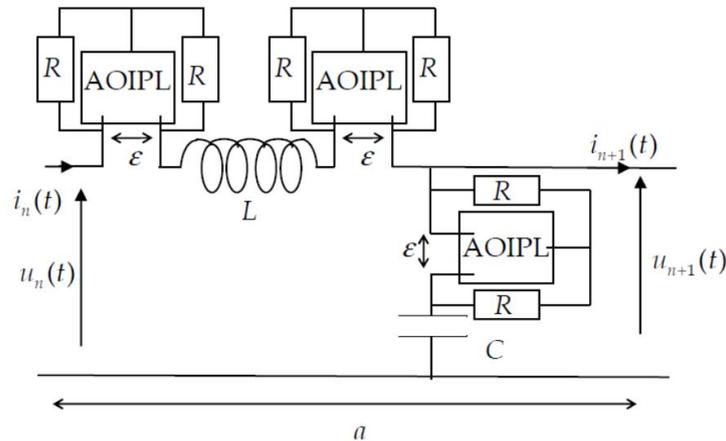
12) On désire obtenir un milieu continu permettant la propagation d'une onde amplifiée. En utilisant le modèle de la ligne à constantes réparties, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension. On fera intervenir les paramètres  $c$  et  $l_c$ .

13) En supposant la tension proportionnelle au champ électrique, en déduire une relation constitutive du milieu continu que l'on supposera linéaire et non chargé (c'est-à-dire une relation à ajouter aux équations de Maxwell pour obtenir le résultat escompté).

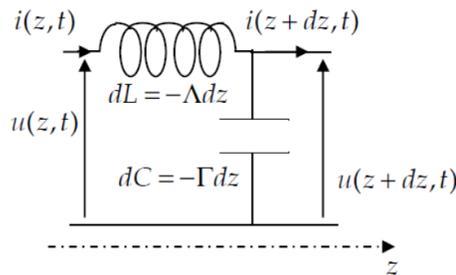
Commenter cette relation en la comparant à une relation phénoménologique du cours.

### C) Réalisation d'un milieu paradoxal

14) On construit, en respectant les conditions du 7) la ligne composée d'amplificateurs opérationnels idéaux parfaits fonctionnant en régime linéaire. Montrer qu'une onde progressive sinusoïdale peut se propager dans cette ligne  $\underline{u}_n = U_0 e^{j(\omega t - kza)}$ ,  $\frac{2\pi}{k} \gg a$ .



15) Quelles sont les conditions permettant d'utiliser le modèle de ligne à constantes réparties pour le système précédent ? On exprimera  $\Lambda$  et  $\Gamma$  en fonction de  $L, C, a, R$ .



16) La valeur efficace de l'intensité de l'onde progressive sinusoïdale  $\underline{i} = \sqrt{2} I_0 e^{j(\omega t - kz)}$  est notée  $I_0 = |\underline{i}|_{\text{efficace}}$ . Calculer la puissance moyenne transmise dans le câble à l'abscisse  $x$ ,  $P_{EMz}$ , en fonction de  $\Lambda, \Gamma, I_0$ . Dans quelle direction est transmise la puissance ?

17) En utilisant la partie I)A), vérifier que les équations de Maxwell pour lesquelles  $\epsilon = -\epsilon_0, \mu = -\mu_0$  sont compatibles avec le modèle de ligne à constantes réparties précédent.

18) Montrer que, pour une onde plane progressive sinusoïdale  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kz)}$ , on obtient une transmission de la puissance dans le sens opposé à la vitesse de phase. On appelle ces milieux, des milieux d'indice négatif !