

E3A Physique 2020 : corrigé

Problème 1 : Transmission d'énergie électrique sans fil

Partie A / Étude des bobines utilisées

A1. L'équation de Maxwell-Thomson s'écrit $\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$; celle de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)}$$

Dans le cadre de l'ARQS, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit $\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$.

A2. Soit un contour fermé orienté \mathcal{L} . Par le théorème de Stokes,

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

où S est une surface s'appuyant sur \mathcal{L} . Avec $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, $\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}}$.

A3. L'approximation du solénoïde infini est valable si $\boxed{\ell \gg a}$.

A4. Symétries : $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie des courants. $\vec{B}(M)$, devant être perpendiculaire à ce plan, est porté par \vec{u}_z .

Invariances : la distribution de courants est invariante par translation selon z , et par rotation selon θ : B ne dépend donc que de r . Finalement, $\boxed{\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_z}$.

A5. Soit un contour d'Ampère rectangulaire ABCD (côté AB confondu avec l'axe Oz), de longueur b et largeur c , entièrement contenu dans le solénoïde. \vec{B} étant selon \vec{u}_z en tout point,

$$\oint_{\text{ABCD}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = [B(0) - B(c)]b$$

Ce contour n'enlace aucun courant. Par le théorème d'Ampère, il vient $B(0) = B(c), \forall c < a$: $\vec{B}(M)$ est **uniforme** dans le solénoïde.

Pour un contour rectangulaire ABCD (côté AB confondu avec Oz) de longueur b et largeur $c > a$,

$$\oint_{\text{ABCD}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_{\text{int}} b$$

car le champ magnétique est supposé nul à l'extérieur du solénoïde. Le courant enlacé par ce contour valant $I_{\text{enlacé}} = N(b/\ell)i(t)$, il vient, d'après le théorème d'Ampère,

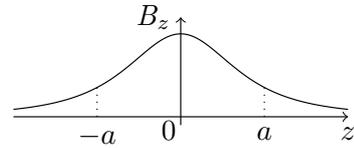
$$\boxed{\vec{B}_{\text{int}} = \frac{\mu_0 N i(t)}{\ell} \vec{u}_z}$$

A6. Tout plan passant par M et contenant \vec{u}_z est plan d'antisymétrie des courants, et donc plan de symétrie du champ magnétique. Ainsi, en tout point M de l'axe Oz, $\vec{B}(M)$ est porté par $\boxed{\vec{u}_z}$.

A7. Le plan $z = 0$ est un **plan de symétrie des courants**, et donc un **plan d'antisymétrie du champ magnétique**. Cette propriété se traduit par $B_z(-z) = B_z(z), \forall z$.

A8. Le champ magnétique est maximal en $z = 0$ et vaut

$$B_{z,\max} = \frac{\mu_0 N i(t)}{2a}$$



Par définition de $z_{1/2}$, $B_z(z_{1/2}) = B_{z,\max}/2$. Il vient

$$\frac{a^2}{2(z_{1/2}^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{4a}$$

$$2a^3 = (z_{1/2}^2 + a^2)^{3/2}$$

$$z_{1/2} = a\sqrt{2^{2/3} - 1} \approx 0,77a$$

A9. Étudions la carte de champ du solénoïde.

— Le plan Π , passant par l'axe vertical de la carte de champ et perpendiculaire à celle-ci, est un plan d'antisymétrie des courants. Ce plan est donc un plan de symétrie du champ magnétique. Pour tout couple de points (L,M) symétriques par rapport à Π , on remarque en effet que

$$\vec{B}(M) = \text{sym}_{\Pi}[\vec{B}(L)]$$

— Le plan Π^* , passant par l'axe horizontal de la carte de champ et perpendiculaire à cette dernière, est un plan de symétrie des courants, soit également un plan d'antisymétrie du champ magnétique. Pour tout couple de points (L,N) symétriques par rapport à Π^* , on note effectivement que

$$\vec{B}(N) = -\text{sym}_{\Pi^*}[\vec{B}(L)]$$

On retrouve les mêmes éléments de symétrie sur la carte de champ de la bobine plate.

A10. Les lignes de champ se resserrent aux endroits où **le champ magnétique est plus intense**. Elles sont parallèles aux endroits où **le champ magnétique est uniforme**. Ces propriétés viennent de l'équation locale $\text{div } \vec{B} = 0$: **le champ magnétique est à flux conservatif**.

Partie B / Transfert de puissance : rendement de Yates

B1. Par définition,

$$P_{\text{reçue}} = (u_{R_1} + u_{L_1})i = R_1 i^2 + L_1 i \frac{di}{dt}$$

L'intensité varie en $\cos(\omega t)$; en utilisant les résultats usuels

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = \left\langle \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right\rangle = 0$$

$$\langle P_{\text{reçue}} \rangle = \frac{R_1 I_0^2}{2}$$

B2. On utilise l'expression du champ magnétique donnée par l'énoncé, en $z = d$, supposé uniforme au niveau de la bobine réceptrice :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 N_1 i(t) a^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} N_2 S_2 = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 i(t) a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}}$$

B3. Il s'agit du phénomène d'**induction électromagnétique**, découlant de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

B4. On calcule la fem en utilisant la **loi de Faraday** :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \omega I_0 \sin(\omega t)$$

B5. L'inductance propre de la bobine réceptrice étant négligée, cette dernière est parcourue par un courant $i_2 = e/R_2$. De fait,

$$P_{\text{généré}} = e i_2 = \frac{e^2}{R_2} = \frac{1}{R_2} \left[\frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \omega I_0 \sin(\omega t) \right]^2$$

Puisque $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = 1/2$,

$$\langle P_{\text{généré}} \rangle = \frac{1}{2R_2} \left[\frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \omega I_0 \right]^2$$

B6. En utilisant les résultats précédents,

$$\eta = \frac{1}{2R_2} \left[\frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \omega I_0 \right]^2 \frac{2}{R_1 I_0^2}$$

$$\eta = k \frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2 a^4 b^4 \omega^2}{R_1 R_2 (d^2 + a^2)^3} \quad \text{avec} \quad k = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2$$

Partie C / Modélisation du couplage : inductance mutuelle

C1. Le flux magnétique créé par un circuit 1, parcouru par un courant i_1 , à travers un circuit 2, s'écrit

$$\Phi_{12} = M i_1 \quad (\text{ou } \Phi_{21} = M i_2)$$

M est en **Henry**.

C2. La loi des mailles dans le circuit 1 s'exprime

$$E = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

De même, la loi des mailles dans le circuit 2 s'exprime

$$0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

C3. On multiplie la première loi des mailles par i_1 , la seconde par i_2 :

$$Ei_1 = R_1i_1^2 + L_1i_1 \frac{di_1}{dt} + Mi_1 \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad 0 = R_2i_2^2 + L_2i_2 \frac{di_2}{dt} + Mi_2 \frac{di_1}{dt}$$

En sommant ces deux équations, on obtient

$$Ei_1 = R_1i_1^2 + R_2i_2^2 + \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 + Mi_1i_2$$

Ce bilan montre que la puissance fournie par le générateur, Ei_1 , est en partie **dissipée par effet Joule dans les résistances**, en partie **stockée sous forme magnétique dans les bobines**.

C4. En reprenant l'expression de \mathcal{E}_{mag} ,

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2}i_2^2 \left[L_1 \left(\frac{i_1}{i_2} \right)^2 + L_2 + 2M \left(\frac{i_1}{i_2} \right) \right]$$

Avec $x = i_1/i_2$,

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2}i_2^2 P(x) \quad \text{avec} \quad P(x) = L_1x^2 + 2Mx + L_2$$

C5. Puisque $\mathcal{E}_{\text{mag}} \geq 0$, $P(x) \geq 0$. Graphiquement, la fonction $x \rightarrow P(x)$ est une parabole tournée vers le haut. Pour assurer que cette fonction soit positive pour tout x , il faut que le discriminant de $P(x)$ soit négatif ou nul :

$$\Delta = (2M)^2 - 4L_1L_2 \leq 0$$

Il vient $M \leq \sqrt{L_1L_2} = M_{\text{max}}$.

C6. On peut par exemple citer :

- les transformateurs, permettant d'élever ou d'abaisser la tension dans les lignes électriques ;
- les moteurs électriques, comportant un circuit primaire fixe et un circuit secondaire mobile ;
- les alternateurs, fonctionnant dans le sens contraire des moteurs ;
- le chauffage par induction (four, plaque) ;
- la détection à boucle inductive (détecteur de métaux, de véhicules) ;
- la transmission d'informations par radio-identification (RFID), mise en œuvre par exemple dans les portiques de sécurité...

Partie D / Résultats expérimentaux

D1. En observant la figure 9, on trouve $\eta_{\text{max}} = 7,5 \cdot 10^{-2}$ et $f_{\text{max}} = 15 \text{ kHz}$.

D2. Puisque $\omega = 2\pi f$, la loi de Yates prédit une **variation quadratique du rendement avec la fréquence**. Aux basses fréquences, η croît avec f (cette variation semble plutôt linéaire) ; aux hautes fréquences, η décroît avec f , **en désaccord avec la loi de Yates**.

D3. D'après le cours, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

D4. Avec la question précédente, $\omega_{\text{max}} = 2\pi f_{\text{max}} = 1/\sqrt{LC_p}$. D'où

$$C_p = \frac{1}{L(2\pi f_{\text{max}})^2} = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ F}$$

D5. Si on écarte la bobine 2 sur le côté, **les lignes de champ s'inclinent par rapport au plan de ses spires**. De fait, **le flux magnétique** $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ **diminue**, de même que η . En observant la carte de champ de la figure 5, **cet effet est d'autant plus marqué que d est petit**.

D6. Cette fois, le rendement diminue beaucoup moins sur les côtés. En tournant la bobine 2, **celle-ci reste approximativement alignée avec les lignes de champ : le flux magnétique Φ varie donc très peu**, de même que η , contrairement à la question précédente.

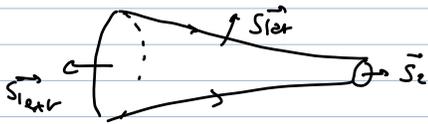
CCS TSI 2011 partie I, corrigé

I. A. propriétés de \vec{B}

1. forme locale $\text{div } \vec{B} = 0 \xrightarrow{c/o} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} = 0$ forme globale

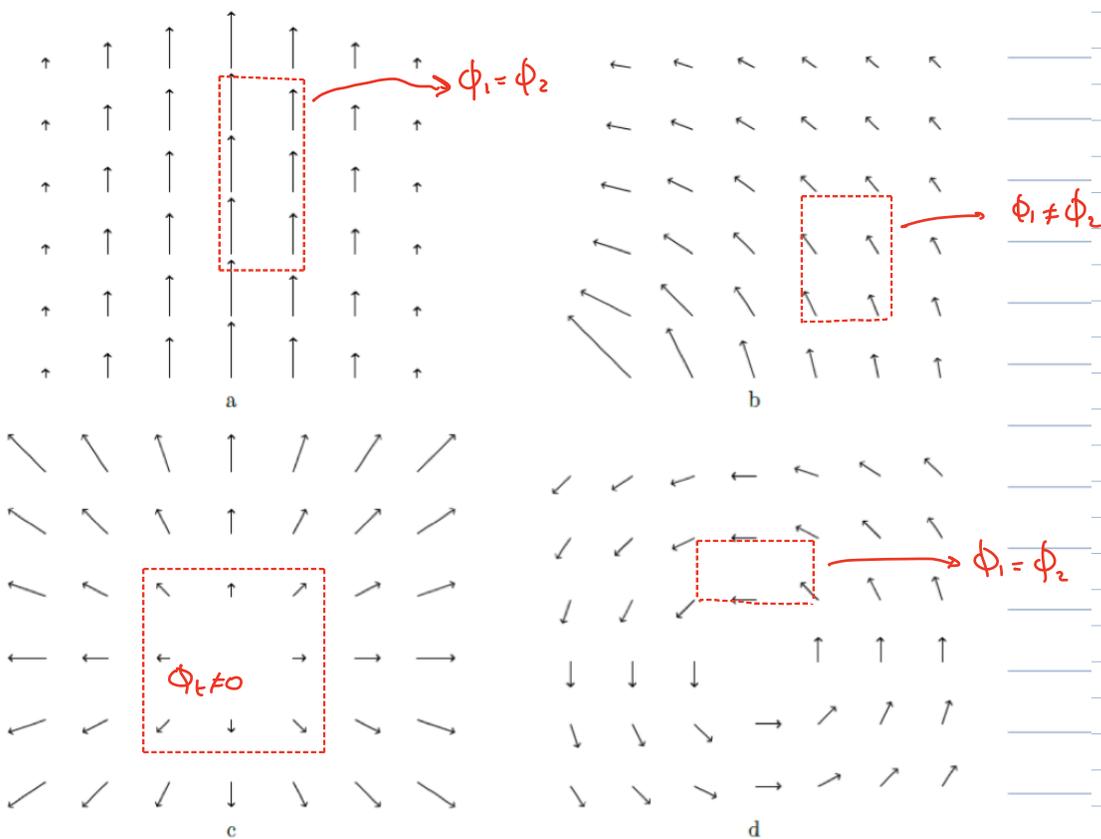
le flux de \vec{B} à travers une surface fermée quelconque est nul.

Concrètement on prend un tube de courant



$\Phi_{S1} = 0 \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2$ (cf cours)

le flux se conserve le long d'un tube de courant



Φ_1 et Φ_2 sont le flux axiaux.

On peut aussi utiliser les expressions fonctionnelles pour calculer $\text{div } \vec{A}$

a) $\vec{A} = A_x(y) \vec{e}_x$ $\begin{matrix} \uparrow \text{or} \\ \rightarrow \text{oy} \end{matrix}$ $\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0$ c) $\vec{A} = A(r) \vec{e}_r$, $\text{div } \vec{A} \neq 0$

b) $\vec{A} = A_r(r) \vec{e}_r + A_\theta(r) \vec{e}_\theta$ $\text{div } \vec{A} \neq 0$ d) $\vec{A} = A \vec{e}_\theta$, $\text{div } \vec{A} = 0$

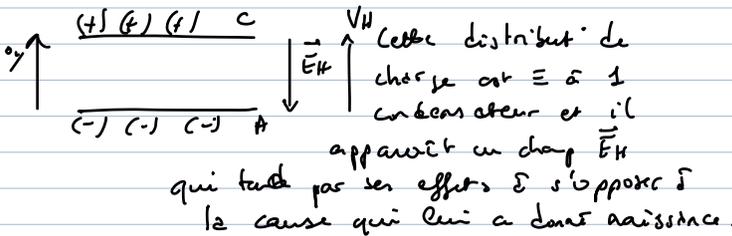
2. $\text{rot}(\vec{B}) = \omega (\vec{r} + \varepsilon) \vec{e}_z = \omega \vec{r} \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \omega \iint \vec{r} \cdot d\vec{S} = \omega \mathcal{I}_e$

I. Effet Hall

B.1 a) $\vec{F}_{L,m} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q v (-\vec{e}_x) \wedge B \vec{e}_z = q v B \vec{e}_y$, avec $q < 0$ (la force est dans $-dy$)
 vitesse de dérive \swarrow opposée à i \searrow rem: \vec{v} est ici la vitesse moyenne de e^-

b. L'application de \vec{B} dévie les trajectoires des e^- , ceux-ci s'accumulent sur la face frontale, il y a alors un déficit en charges (-) sur la face du fond et

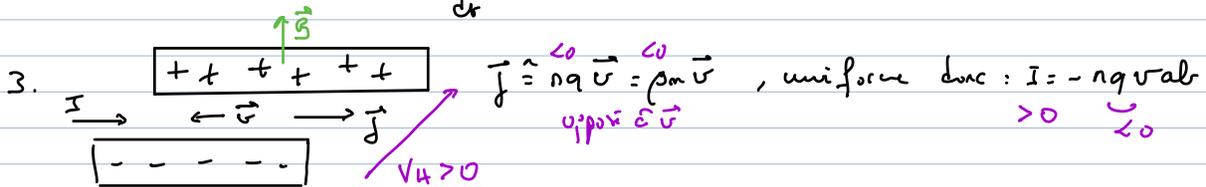
une apparition de charges (+)



$$V_H \hat{=} V_C - V_A = \int_C^A \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$$

si $q > 0$, les charges se distribuent à l'opposé, V_H dépend du signe de q

2. Pfd $\vec{E} \perp \vec{v}$ en RS: $u \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} = q (\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B}) \Rightarrow \vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} = -vB \vec{e}_y$



$$V_H = \int_C^A E dy = vBa = -\frac{I}{nq} \frac{B}{b} \quad \text{donc: } V_H \cdot b = -\frac{1}{nq} IB, \quad R_H = -\frac{1}{nq} > 0$$

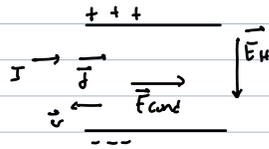
4. AN: $\rho = n \frac{\Delta}{\Delta a} \rightarrow m = \rho \frac{\Delta a}{\Delta} = 8.4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}, \quad R_H = 7.45 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{C}^{-1}$

et $V_H = 7.45 \cdot 10^{-8} \text{ V}$ la valeur de I est réelle et un peu élevée de B est élevée, V_H est du signe de $-q$.

rem: c'est surtout la valeur de n qui est mal choisie. On utilise en pratique des semi-conducteurs (dopés n ou p) pour lesquels n est 10^5 à 10^6 + faible que pour un conducteur et V_H bcp + élevée.

Complément: Cette approche met de côté la conductivité du métal dans le cas d'un

conducteur de \vec{E} : $\vec{j} = \sigma \vec{E}_{\text{cond}}$
 un conducteur de \vec{E}, \vec{B} : $\vec{j} = \sigma (\vec{E} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B}) \Leftrightarrow \vec{E} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{j} / \sigma$



les 2 champs sont \perp (si $j \parallel Oz$)

preuve: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - \frac{m\vec{v}}{\tau} = \vec{0}$ (R.S.)

$$\times m \quad \underbrace{mq}_{RH^{-1}} \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} = m \frac{mq}{\tau} \vec{v} \Rightarrow \vec{E} + RH \vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{j} / \sigma$$

rem: le signe de RH dépend de la façon dont on définit le lien entre V_H et RH

Classiquement $RH \hat{=} \frac{1}{nq}$, le même signe que q .

↳ Pour traiter ceci de façon rigoureuse un traitement mathématique de σ est nécessaire, \vec{j} et \vec{E} n'étant plus colinéaires.

5. n est + faible, V_H + grand (cf un cas) $B = 0,345 T$

la mesure de V_H permet la détermination de B .

6. la population des e^- dans la bande de conduction des $1/2$ conducteurs \propto avec T (cf doc 2), $n \propto$, $RH \propto$ avec T

↳ Avec le rapport de 2 températures, je ne vois pas de lois similaires

Si on: facteur de Boltzmann: $n \propto e^{-E_F/kT}$

↳ $\frac{dRH}{RH} = -\frac{0dT}{T} \Rightarrow \frac{\Delta RH}{RH} = \frac{0}{T} \Delta T = ??\%$ Ces capteurs sont très sensibles aux variations de T .

Problème n°2 – Mécanismes d'une propagation virale et conditions de formation d'un virus *ENS Bio 2022*

B. Conditions de formation d'un virus

18. On applique le théorème de GAUSS à une distribution de charge surfacique à symétrie sphérique. On travaille en coordonnées sphériques (r, θ, φ) . Les plans $(M\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont de plans de symétrie de la distribution des charges. Le champ électrique appartient à leur intersection, il est porté par \vec{e}_r . Les invariances de la distribution de charges par rotation d'angle θ et par rotation d'angle φ font que le problème ne dépend que de r . On a donc $\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$. Le théorème de GAUSS donne $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r(r)4\pi r^2$ pour une sphère de rayon r . On a donc $E_r(r)4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$. Si $r < R_v$, alors $Q_{int} = 0$, le champ électrique est donc nul. Le potentiel est donné par $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r$. On en déduit que le potentiel est constant pour $r \leq R_v$, on rappelle que le potentiel est toujours continu au contraire du champ électrique qui sera dans ce cas discontinu. Si l'on se place pour $r > R_v$, on pourra écrire que $4\pi r^2 E_r(r) = \frac{\sigma 4\pi R_v^2}{\epsilon}$. Le champ électrique sera donc $E_r(r) = \frac{\sigma R_v^2}{\epsilon r^2}$. On en déduit le potentiel par intégration sur r pour obtenir $V(r) = \frac{\sigma R_v^2}{\epsilon_0 r} + \text{Cte}$. On choisit la convention classique de considérer comme nul le potentiel à l'infini de la particule virale. On a donc $\text{Cte} = 0$. Le potentiel est continu en $r = R_v$, on en déduit sa valeur constante à l'intérieur de la particule virale. On trouve bien les expressions $V(r \leq R_v) = \frac{\sigma R_v}{\epsilon}$ et $V(r \geq R_v) = \frac{\sigma R_v^2}{\epsilon r}$. L'allure du graphique de la dépendance de ce potentiel vis-à-vis du rayon r est donné à la figure 2.

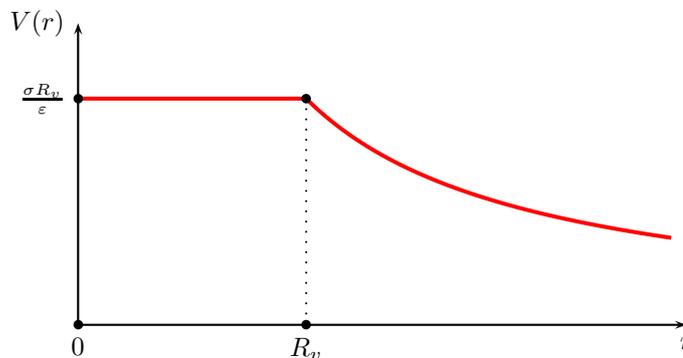


FIGURE 2 – Évolution du potentiel électrique créé par le virus.

19. On utilise la formule proposée (qui correspond à l'énergie d'interaction d'un système de charges, ici réparties en surface) et on trouve : $U_{elec} = \frac{2\pi R_v^3 \sigma^2}{\epsilon}$.

20. L'allure graphique de la dépendance de l'énergie totale $U_{tot} = U_{elec} + U_{hp}$ d'un virus vis-à-vis de son rayon R_v est donnée à la figure 3. On a l'expression suivante pour l'énergie totale $U_{tot} = U_{elec} + H_{hp} = \frac{2\pi\sigma^2 R_v^3}{\epsilon} - \gamma R_v^2$. Si l'on dérive par rapport à R_v cette expression, on constate que l'énergie passe par un minimum donné par l'équation $\frac{6\pi\sigma^2 R_v^2}{\epsilon} - 2\gamma R_v = 0$. Ce minimum qui correspond à une situation d'équilibre stable est $R_v^* = \frac{\gamma\epsilon}{3\pi\sigma^2}$.

21. Il faut calculer la charge volumique conséquence de la présence des cations et des anions présents en solution. On a $\rho = ec_+(r) - ec_-(r)$. On peut utiliser cela dans l'équation de MAXWELL-GAUSS $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$. Avec $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$, on a l'équation de LAPLACE-POISSON $\text{div}\overrightarrow{grad}V = -\frac{\rho}{\epsilon} = \Delta V$. On peut donc écrire les expressions de c_+ et de c_- pour obtenir après calcul $\Delta V = \frac{2ec_\infty}{\epsilon} \sinh\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right)$. On peut obtenir une équation différentielle linéaire si l'on linéarise le sinus hyperbolique. Il faut pour cela que $eV(r) \ll k_B T$. On obtient alors

$$\Delta V = \frac{2e^2 c_\infty}{\epsilon k_B T} V(r)$$

22. Comme le laplacien correspond à une double dérivation par rapport à r , ici, on obtient nécessairement κ^2 en m^{-2} . κ est l'inverse d'une distance, il a pour expression : $\kappa = \sqrt{\frac{2e^2 c_\infty}{\epsilon k_B T}}$.

23. Pour résoudre l'équation différentielle précédente, il est préférable d'utiliser l'expression du laplacien à symétrie sphérique $\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2} = \kappa^2 V(r)$. On change de variable en posant $f(r) = rV(r)$ et on obtient l'équation différentielle $\frac{d^2 f}{dr^2} - \kappa^2 f(r) = 0$. Cette équation possède les solutions $f(r) = A \exp \kappa r + B \exp -\kappa r$ ce qui donne l'expression du potentiel $V(r) = \frac{A}{r} \exp \kappa r + \frac{B}{r} \exp -\kappa r$. Il est physiquement inacceptable de voir le potentiel diverger à l'infini de la particule virale, le potentiel doit même être nul. Il s'en suit que l'on a bien la forme $V(r) = B \frac{\exp(-\kappa r)}{r}$. Le potentiel décroît plus rapidement avec r que dans le cas où on n'a pas pris en compte la présence d'ions en solution. Les ions s'organisent autour de la particule virale pour neutraliser, en

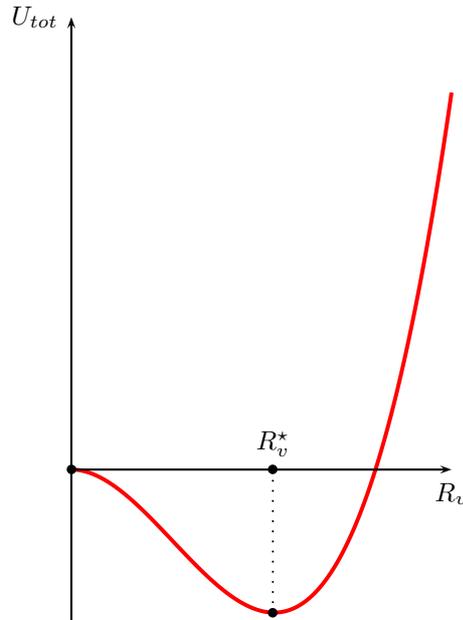


FIGURE 3 – Évolution de l'énergie totale d'une particule virale

quelque sorte, les effets de la charge du virus. Si l'on augmente la température, les ions sont répartis de façon beaucoup plus homogène rapidement parce que κ va augmenter lorsque T augmente. Ils vont moins contribuer à faire écran à la charge de la particule virale.

24. Si les espèces ioniques sont absentes, on a $c_\infty = 0$ et donc $\kappa = 0$. La loi du potentiel est donc constante à l'intérieur et décroissante en $1/r$ à l'extérieur de la particule virale. Avec les expressions fournies, on trouve $V(r) = Q \frac{\sinh \kappa r}{\kappa r 4\pi \epsilon R_v (\sinh \kappa R_v + \cosh \kappa R_v)}$. On cherche la limite lorsque $\kappa R_v \rightarrow 0$. On a $\frac{\sinh \kappa r}{\kappa r} \rightarrow 1$ alors que $\sinh \kappa r \rightarrow 0$ et $\cosh \kappa r \rightarrow 1$. On en déduit que $V(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon R_v}$. En introduisant la charge surfacique, on retrouve bien l'expression vue au départ : $V(r \leq R_v) = \frac{\sigma R_v}{\epsilon}$. On traite de la même façon, l'expression du potentiel fournie pour $r \geq R_v$ et on trouve $V(r \geq R_v) = \frac{\sigma R_v^2}{\epsilon r}$.

25. Pour $r \ll R_v$, on peut profiter des expressions des développements limités qui sont fournis. $V(r) = W \frac{\sinh \kappa r}{r} = \frac{W}{r} (\kappa r + \frac{1}{6} \kappa^3 r^3) = W \kappa (1 + \frac{1}{6} \kappa^2 r^2)$. À l'intérieur de la coque virale, le potentiel va relativement peu varier (à l'image de la situation sans ions où il est constant) et sa variation sera de type parabolique. À l'extérieur, on a une décroissance encore plus rapide puisqu'elle combine les effets de la décroissance de la fonction en $1/r$ et celle de la fonction $\exp -\kappa(r - R_v)$.

26. Il s'agit de comprendre que la charge de la coque virale est positive et donc que les anions vont être attirés par elle. La concentration en anions va passer par un maximum au niveau de $r = R_v$. Au contraire les cations auront une concentration qui va passer par un minimum. Pour toutes les distances proches assez proches de R_v , on aura $c_- > c_+$. On supposera que cela est vérifié dans toute la partie intérieure de la coque virale. Une chose est sûre, lorsque l'on est très éloigné de la particule virale, la répartition des ions doit assurer une neutralité locale puisque la charge de la particule virale ne se fait plus sentir, il n'y a plus d'influence. Les deux concentrations doivent alors vérifier $c_+ = c_- = c_\infty$. Entre R_v et l'infini, l'évolution n'est pas forcément évidente à tracer. On se contentera de tracer une courbe décroissante pour c_- et une courbe croissante pour c_+ . On remarquera aussi que sur le graphique, il y a globalement plus d'anions que de cations. Cela est acceptable puisque les charges positives du virus viennent nécessairement de quelque part, on peut supposer que cela vient des ions de la solution dans laquelle le virus s'est retrouvé. Le tracé approximatif est réalisé à la figure 4.

27. On a donc $U_{elec} = \frac{1}{2} Q V(R_v) = \frac{1}{2} Q W \kappa \frac{\sinh \kappa R_v}{\kappa R_v}$. Comme $W = \frac{Q}{4\pi \epsilon \kappa R_v} \frac{1}{\sinh \kappa R_v + \cosh \kappa R_v}$, on développe les calculs en utilisant aussi $Q = \sigma 4\pi R_v^2$. Après les calculs, on obtient : $U_{elec} = \frac{2\pi \sigma^2 R_v^2}{\epsilon \kappa} \frac{1}{1 + \coth \kappa R_v}$.

28. Si $\kappa R_v \gg 1$ alors, on peut effectuer une approximation sur la tangent hyperbolique pour écrire que $\coth \kappa R_v \simeq 1$. Ainsi, on arrive sans difficulté à l'expression : $U_{elec,tot} = \frac{\pi \sigma^2 R_v^2}{\epsilon \kappa}$.

29. La fonction énergie totale est maintenant $U_{tot} = \frac{\pi \sigma^2 R_v^2}{\epsilon \kappa} - \gamma R_v^2 = (\frac{\pi \sigma^2}{\epsilon \kappa} - \gamma) R_v^2$. Il n'y a plus de taille particulière correspondant à un minimum comme nous l'avions vu avant sauf pour $R_v = 0$ ce qui n'a pas beaucoup d'intérêt. La courbe donnant l'énergie totale est soit une parabole croissante, soit une parabole décroissante. La

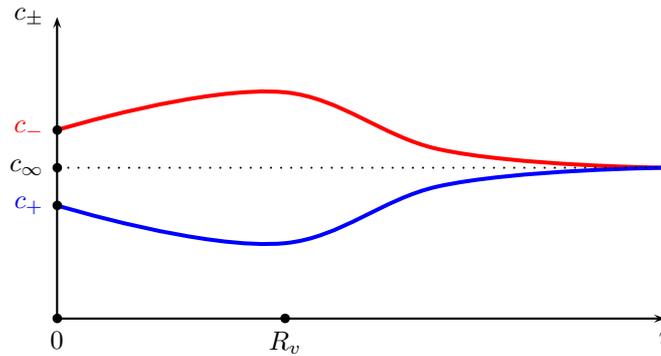


FIGURE 4 – Évolution des concentrations en cations et en anions dans la solution contenant le virus

formation du virus ne pourra se faire que dans le cadre d’une diminution de l’énergie. Cela se produira pour $\frac{\pi\sigma^2}{\varepsilon\kappa} - \gamma < 0$. En utilisant l’expression de κ établie avant, on arrive à la concentration critique recherchée :

$$c_\infty^* = \frac{\pi^2\sigma^4 k_B T}{2\varepsilon\varepsilon^2\gamma^2}. \text{ La formation du virus se réalisera pour } c_\infty > c_\infty^*.$$

30. L’énergie totale de la particule virale devient $U_{tot} = (\frac{\pi\sigma^2}{\varepsilon\kappa} - \gamma - \frac{\pi q\sigma^3}{k_B T \varepsilon^2 \kappa^4 \ell^2})R_v^2 = \mathcal{C}R_v^2$. Pour qu’il y ait formation du virus, il faut que $\mathcal{C} < 0$. On commence par écrire que $\frac{\pi\sigma^2}{\varepsilon} < \gamma\kappa + \frac{\pi q\sigma^3}{k_B T \varepsilon^2 \ell^2} \frac{1}{\kappa^3}$. Cela revient encore à écrire que $1 < \frac{\gamma\varepsilon}{\pi\sigma^2}\kappa + \frac{q\sigma}{k_B T \varepsilon \ell^2} \frac{1}{\kappa^3}$. On approche de la forme voulue en écrivant que $1 < \frac{\kappa}{\kappa^*} + \frac{q\sigma}{k_B T \varepsilon \ell^2} \frac{1}{\kappa^3}$. Il ne reste plus qu’à poser $A\kappa^{*3} = \frac{q\sigma}{k_B T \varepsilon \ell^2}$. Cela permet de donner l’expression attendue : $A = \frac{q\sigma}{k_B T \varepsilon \ell^2} \frac{1}{\kappa^{*3}}$. La relation est donc bien : $X > 1 - \frac{A}{X^3}$.

31. On doit comparer les fonction $f(X) = X$ et $g(X) = 1 - \frac{A}{X^3}$ avec la condition de formation du virus $X > 1 - \frac{A}{X^3}$. Cela est réalisé à la figure 5.

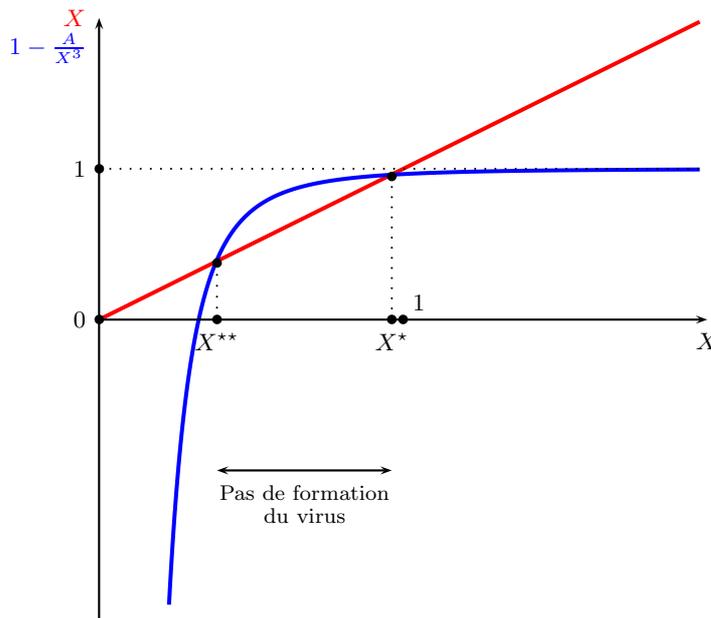


FIGURE 5 – Condition de formation de la particule virale

32. On a donc bien une formation du virus pour $X < X^{**}$ et pour $X > X^*$ comme on a pu le constater sur la figure 5. On peut voir que X^* est proche de 1, on posera $X = 1 - \epsilon$. L’intersection s’obtient pour $1 - \epsilon = 1 - \frac{A}{(1-\epsilon)^3}$. En effectuant un développement limité, on peut encore écrire que $1 - \epsilon = 1 - A(1 + 3\epsilon)$ comme $3\epsilon A \ll A$, on peut donc conclure que $\epsilon = A$. Ainsi, on a $X^* = 1 - A$. Pour l’autre abscisse, on doit être en réalité assez près de 0 même si sur le graphique pour mieux visualiser les choses, cela n’est pas le cas. On suppose donc que $1 - \frac{A}{X^{*3}} \simeq 0$. Cela permet d’obtenir $X^{**} = A^{1/3}$.

33. Les domaines propices à la formation des virus, d’une part sans tenir compte de la présence d’ARN, d’autre part en la considérant (toujours pour $A \ll 1$) sont présentés à la figure 6.

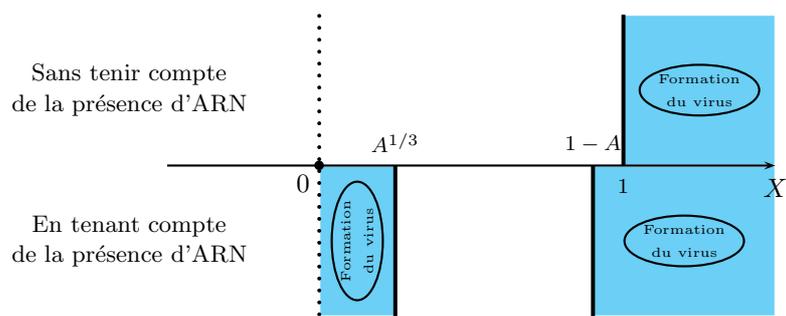


FIGURE 6 – Domaines de formation des virus, selon la valeur du paramètres $X = \kappa/\kappa^*$.