

CCS – MP – PHYSIQUE-CHIMIE 2 – CORRIGÉ

II. Plateforme stabilisatrice

Q.27 L'excitation étant sinusoïdale, on recherche une solution particulière sinusoïdale à la même pulsation. Pour ce faire, nous introduisons les signaux complexes $\underline{a}(t)$ et $\underline{\theta}(t)$ ainsi :

$$-\omega^2 \underline{\theta}_m e^{j\omega t} + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{\theta}_m e^{j\omega t} + \omega_0^2 \underline{\theta}_m e^{j\omega t} = \frac{a_0 e^{j\omega t}}{\ell_{\text{eff}}}$$

$$\underline{\theta}_m = \frac{a_0 / \ell_{\text{eff}}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}}$$

Q.28 Pour $\omega = 0$:

$$\theta_0 = \frac{a_0}{\ell_{\text{eff}} \omega_0^2}$$

On écrit :

$$\underline{\theta}_m = \frac{\frac{a_0}{\ell_{\text{eff}} \omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}} = \frac{\theta_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

Ainsi :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

C'est la fonction de transfert d'un filtre **passé-bas du second ordre**.

Q.29 Si le pendule oscillait dans l'air :

— $\beta = 0$ (pas de frottement visqueux) si bien que $\frac{\omega}{\omega_0 Q} = 0$;

— $\ell_{\text{eff}} = \ell$ car $m_{\text{eff}} = \rho_0 V_0$ et $(\rho_0 - \rho_\ell) V_0 g = \rho_0 V_0 g$.

Ainsi $\omega_0^2 = g/\ell$ d'où :

$$\underline{H}_1 = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{g/\ell}}$$

Q.30 Sans liquide, la pulsation propre est d'environ 1,2 Hz, on observe à cette fréquence une résonance très forte (un gain de 40 dB indiquant une multiplication par 100 par rapport à la valeur à très basse fréquence θ_0) : c'est logique car nous voyons que $|\underline{H}_1| \rightarrow +\infty$ quand $\omega \rightarrow g/\ell$.

En présence du liquide, la fréquence de coupure est d'environ 0,025 Hz (soit une division de la fréquence de coupure d'un facteur 50, conforme à la réponse Q23). À la coupure, $G = -20$ dB indiquant :

$$|\underline{H}| = \left| \frac{\omega_0 Q}{\omega_0} \right| = Q = \frac{1}{10}$$

et donc l'importance de l'amortissement visqueux. Aux fréquences usuelles de la houle, le gain est au moins inférieur à -20 dB atténuant donc les oscillations par rapport à la valeur TBF θ_0 . Cela montre l'utilité de la plateforme stabilisatrice.

Si $a_0 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ à très basse fréquence, l'inclinaison θ_0 est :

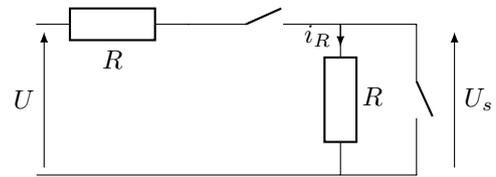
$$\theta_0 = \frac{a_0}{\ell_{\text{eff}} \omega_0^2} = \frac{a_0}{g} = 0,1 \text{ rad}$$

Pour les fréquences considérées, le gain max est -20 dB soit un angle $\theta_0/10$: l'amplitude maximale est $0,01 \text{ rad} = 0,6^\circ$

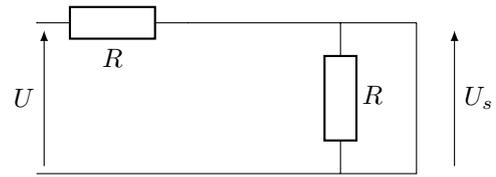
Traitement du signal

Q.31 À basse fréquence, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et à haute fréquence, il se comporte comme un fil. Considérons le **filtre A** :

Basses fréquences : le courant est nul dans les deux branches ouvertes, le courant i_R est donc également nul d'après la loi de nœuds. Ainsi $U_s = Ri_R = 0$.



Hautes fréquences : la tension aux bornes d'un fil est nul ainsi $U_s = 0$.

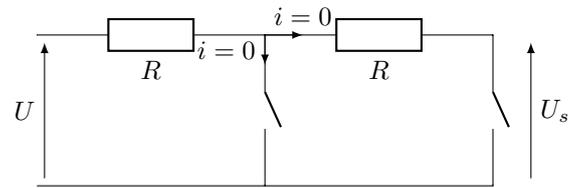


Le filtre A présente un comportement **passé-bande**.

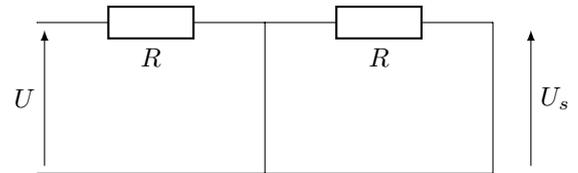
Dans le **filtre B**, la tension U_s est la différence entre l'entrée et la tension de sortie du filtre A. Le filtre A étant passé-bande, le filtre B présente un comportement **réjecteur de bande**.

Considérons le **filtre C** :

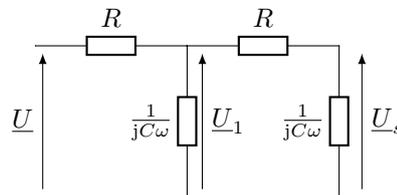
Basses fréquences : le courant est nul dans les deux branches ouvertes, le courant dans la première résistance l'est donc également d'après la loi de nœuds. D'après la loi des mailles, $U_s + 0 + 0 = U$. Ainsi $U_s = U$.



Hautes fréquences : la tension aux bornes d'un fil est nul ainsi $U_s = 0$.



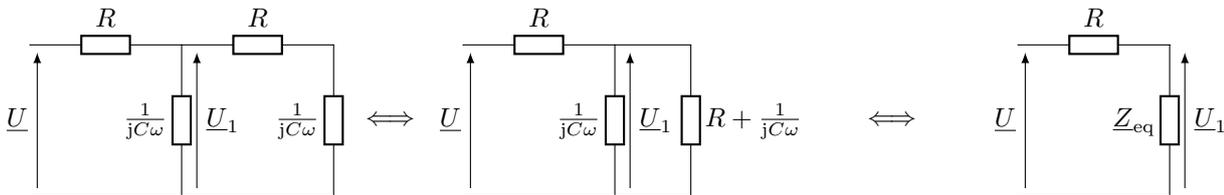
Le filtre C présente un comportement **passé-bas**. C'est le **filtre C** qui est adapté. **Q.32** On refait le circuit en remplaçant les tensions par leurs amplitudes complexes et les composants par leurs impédances :



Commençons par déterminer la relation entre U_1 et U_s :

$$U_s = \frac{1/(jC\omega)}{1/(jC\omega) + R} U_1 = \frac{1}{1 + jRC\omega} U_1$$

Il faut ensuite trouver la relation entre U_1 et U . Comme C et R ne sont pas parcourus par le même courant, on ne peut pas appliquer directement un pont diviseur de tension :



Z_{eq} et R sont parcourus par le même courant, on peut donc appliquer le pont diviseur :

$$U_1 = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R} U = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z_{eq}}} U$$

avec :

$$\frac{1}{Z_{eq}} = jC\omega + \frac{1}{R + 1/(jC\omega)}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \frac{1}{1 + R \left(jC\omega + \frac{1}{R + 1/(jC\omega)} \right)} \underline{U} \\ &= \frac{1}{1 + jRC\omega + \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}} \underline{U} \\ &= \frac{1 + jRC\omega}{1 + 2jRC\omega + (jRC\omega)^2 + jRC\omega} \underline{U} \\ \underline{U}_s &= \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{U}_1 = \frac{1}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2} \underline{U}\end{aligned}$$

On trouve bien :

$$\boxed{\underline{H}_F(j\omega) = \frac{1}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}}$$

Q.33 Pour effacer les fréquences au-dessus de 1 Hz, on peut choisir $f_c = 0,1$ Hz soit $1/(RC) = 2\pi \times 10^{-1} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, en choisissant par exemple $\boxed{C = 1 \mu\text{F}}$, on doit choisir $\boxed{R = 1,6 \text{ M}\Omega}$.

Problème n° 2 – Détecteurs de véhicules à boucle inductive *Centrale PSI 2007*

A. Étude de l'oscillateur quasi-sinusoidal

1. Il s'agit de l'effet JOULE qui traduit les interactions entre les électrons libres du conducteur avec les ions constituant le réseau cristallin de ce dernier et le reste du cortège électronique.

Simulation d'une résistance négative

2. Dans le cas où l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire, on peut écrire que V est aussi la tension aux bornes de la résistance R_1 puisque $\epsilon = V_+ - V_- = 0$. Or, cette résistance se trouve montée en série avec la résistance R_2 : on peut appliquer un diviseur de tension et écrire que $V = \frac{R_1}{R_1+R_2}V_s$. La loi des mailles

appliquée au montage nous permet aussi d'écrire que $V = RI + V_s$ et que $RI = -\frac{R_2}{R_1+R_2}V_s$. À partir de ces relations, on obtient : $V = -\frac{RR_1}{R_2}I$ et $V_s = -RI(1 + \frac{R_1}{R_2})$.

3. Une simple loi des mailles permet d'écrire : $V = RI \pm V_{sat}$ pour les deux domaines du régime saturé.

4. En régie linéaire, on a constaté que $V = -\frac{RR_1}{R_2}I$. Cela peut bien s'interpréter comme un comportement de résistance négative avec $R_n = \frac{RR_1}{R_2}$. Ce régime de fonctionnement reste valable tant que la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel n'atteint pas les deux valeurs de saturation. Or comme $V = \frac{R_1}{R_1+R_2}V_s$, on trouve que : $V_0 = \frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}$. La caractéristique $V = f(I)$ visible sur la figure 2 est faite de trois segments de droite : un de pente négative (régime linéaire) et deux de pente identique et positive. Prenons l'exemple de la saturation où $V_s = V_{sat}$. Ce régime est valable pour $\epsilon = V_+ - V_- > 0$. Or $V_- = V$ et $V_+ = \frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}$, comme à ce moment $V = RI + V_{sat}$, on obtient la condition pour ce régime de fonctionnement : $I < -\frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{V_{sat}}{R}$. Ce segment correspond au segment croissant sur la gauche de la caractéristique.

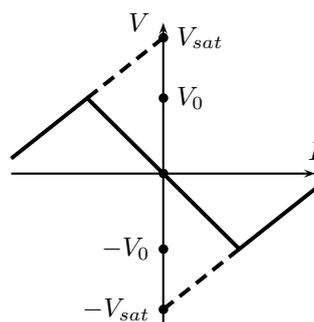


FIGURE 2 – Caractéristique de la résistance négative

Étude de l'oscillateur

5. Les deux condensateurs sont montés en parallèles, nous savons qu'alors on peut rendre le système équivalent à un condensateur de capacité équivalent à la somme des deux capacités : $C_{eq} = C_b + C_s$.

6. Appelons i l'intensité traversant L et R_b et arrivant au nœud. On peut alors écrire que $i = C_{eq} \frac{dU}{dt} - \frac{U(t)}{R_n}$. La loi des mailles nous permet d'obtenir la relation : $L \frac{di}{dt} + R_b i = -U(t)$. En utilisant l'expression de i précédente ainsi que sa dérivée temporelle, on arrive à : $a \frac{d^2U}{dt^2} + b \frac{dU}{dt} + (1-c)U(t) = 0$ avec : $a = LC_{eq}$, $b = R_b C_{eq} - \frac{L}{R_n}$ et $c = \frac{R_b}{R_n}$.

7. Pour que les solutions de l'équation différentielle soient sinusoïdales, il faut que l'équation différentielle ne

contienne pas de terme d'ordre 1 : $b = 0$. On obtient la condition : $R_n = Q^2 R_b$.

8. Les solutions sont effectivement des sinusoides si le coefficient $1 - c$ est positif. Dans le cas contraire, les solutions seraient des exponentielles réelles et non pas des exponentielles complexes. Il faut donc que $c < 1$ et donc $\frac{R_b}{R_n} < 1$. Comme $R_n = Q^2 R_b$, on en déduit que : $Q > Q_{lim} = 1$.

9. L'équation différentielle est maintenant : $\frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{1-c}{LC_{eq}} U(t) = 0$ avec $c = \frac{1}{Q^2}$. La pulsation propre de cet oscillateur est telle que $\omega^2 = \frac{1-c}{LC_{eq}}$. On en déduit l'expression de la fréquence : $f = \frac{1}{2\pi Q} \sqrt{\frac{Q^2-1}{LC_{eq}}}$.

10. On peut écrire la relation approchée $f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC_{eq}}}$ car $Q^2 \gg 1$. Le calcul numérique montre que $\frac{\sqrt{Q^2-1}}{Q} = 0,992$. L'écart avec la valeur 1 est de 0,8%. C'est bien une valeur inférieure à 1%.

11. On trouve : $C_{eq} = 68 \text{ nF}$, $C_s = 58 \text{ nF}$ et $Q = 67$ ce qui constitue une valeur tout à fait satisfaisante pour le facteur de qualité.

12. Pour amorcer les oscillations, il faut un système qui diverge et donc un coefficient du terme d'ordre 1 dans l'équation différentielle légèrement négatif. On peut réécrire l'équation différentielle selon : $LC_{eq} \frac{d^2 U}{dt^2} + R_b C_{eq} (1 - \frac{Q^2 R_b}{R_n}) \frac{dU}{dt} + (1 - \frac{R_b}{R_n}) U(t) = 0$. La condition est donc $R_n < Q^2 R_b$ et aussi $R_n > R_B$. Ces deux conditions sont satisfaites sans problème.

13. L'amplitude des oscillations générées par le circuit est limitée par la tension d'alimentation du générateur qui fait fonctionner l'amplificateur opérationnel. En pratique, on trouve des valeurs un peu inférieures aux tensions de saturation.

B. Étude du fréquencemètre

Étude d'une cellule $R'C'V_0$

14. On a $V(t) = V_0 + R'i$ et $i = C' \frac{d(e' - V)}{dt}$. L'équation différentielle est : $R'C' \frac{dV}{dt} + V = V_0 + R'C' \frac{de'}{dt}$.

15. En régime permanent, le condensateur est complètement chargé et alors $i = 0$ donc $V(t < 0) = V_0$ et $u_{C'} = E - V_0$. La tension $u_{C'}$ est continue donc à la date $t = 0^+$, on a toujours $u_{C'} = E - V_0$. Mais à cette date, $e'(t = 0^+) = -E$ d'où $V(t = 0^+) = -(2E - V_0) < 0$.

16. Pour $t > 0$, on a $\frac{de'}{dt} = 0$, l'équation différentielle est $R'C' \frac{dV}{dt} + V(t) = V_0$. Elle possède comme forme de solution $V(t) = V_0 + A \exp -\frac{t}{R'C'}$. À la date $t = 0^+$, nous connaissons l'expression de $V(t)$. On en déduit que le forme finale de la solution est : $V(t) = V_0 - 2E \exp -\frac{t}{R'C'}$.

17. $e'(t)$ et $V(t)$ sont représentés sur la figure 3.

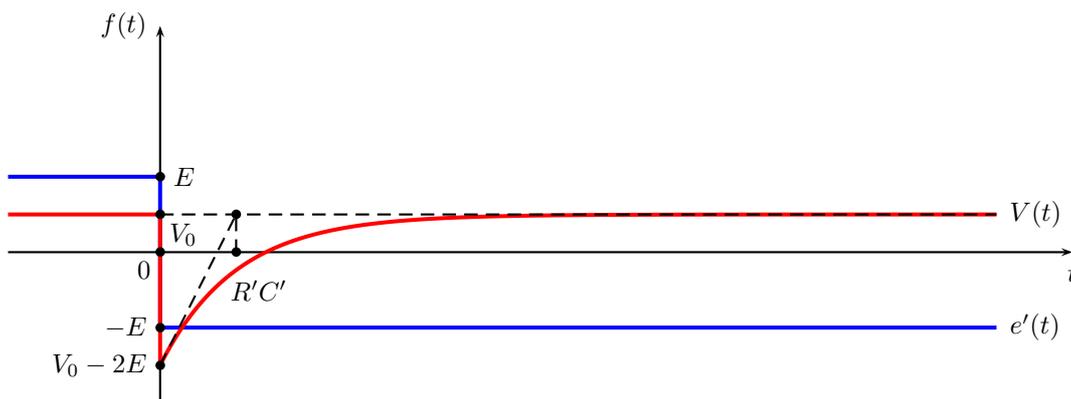


FIGURE 3 – Cellule $R'C'V_0$

Étude du module d'entrée du fréquencemètre

18. Les chronogrammes représentant les évolutions de $e(t)$, $e'(t)$ et $V(t)$ sont représentés sur la figure 4. Le raisonnement suivi dans la partie précédente se transpose avec V_{sat} pour E . La réponse pour une montée de tension est symétrique de celle obtenue précédemment pour la chute de tension de $-2E$.

Étude du module de sortie

19. L'amplificateur opérationnel ne fonctionne pas en mode linéaire car le circuit proposé ne présente qu'une rétroaction sur l'entrée non-inverseuse (+) de l'amplificateur opérationnel alors qu'une rétroaction sur l'entrée

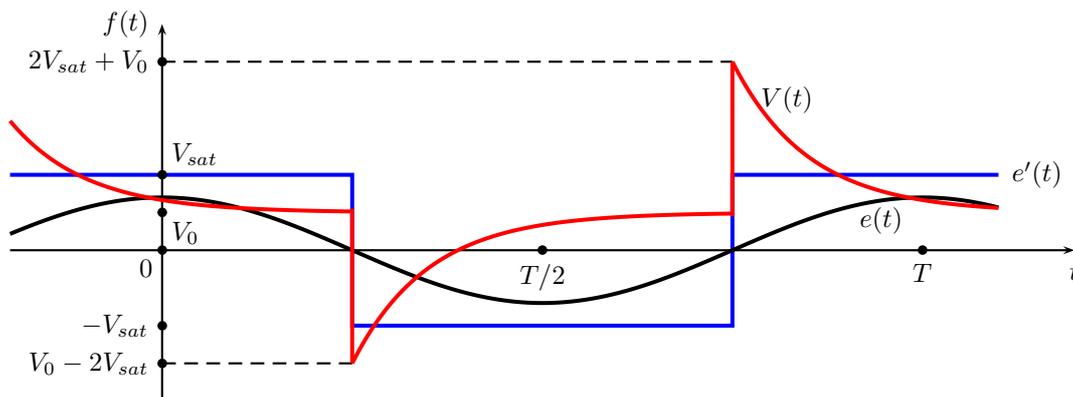


FIGURE 4 – Module d'entrée du fréquencesmètre

inverseuse (-) est indispensable pour espérer rester en régime linéaire.

20. Si la charge du condensateur est terminée alors il n'y a plus de courant dans la résistance R , on a donc $V^+ = 0$. La tension d'attaque étant périodique, on a $U(t) = V_0 = V^-$. La tension différentielle d'entrée est négative : $\epsilon = V^+ - V^- = -V_0 < 0$. La tension de sortie est en saturation négative : $S(t = 0^-) = -V_{sat}$.

21. On a $U_C(t = 0^-) = -V_{sat}$ qui est continue et $U_R(t = 0^-) = 0$. Maintenant à $t = 0^+$, on a $U(t = 0^+) = -2V_{sat} + V_0 < 0$ donc $\epsilon > 0$ et par conséquent $S(t = 0^+) = +V_{sat}$. Par la loi des mailles, on a $V^+(t = 0^+) - V_{sat} = S(t = 0^+)$. Ceci nous permet de conclure que : $V^+(t = 0^+) = 2V_{sat}$.

22. La sortie de l'amplificateur opérationnel ne bascule pas à nouveau entre $t = \tau^-$ et $t = \tau^+$. En effet, puisque $\tau \ll RC$, il est logique de supposer que $V^+(t = 0^+) \simeq V^+(t = \tau) \simeq 2V_{sat}$. À cette date, $U(t) = V_0$ et donc $\epsilon = V^+ - U = 2V_{sat} - V_0 > 0$: la saturation reste positive.

23. La loi des mailles donne $V^+ + U_C = V_{sat}$. En dérivant cette expression, on obtient $\frac{dV^+}{dt} + \frac{dU_C}{dt} = 0$. Comme $C \frac{dU_C}{dt} = \frac{V^+}{R}$, l'équation différentielle recherchée est : $\frac{dV^+}{dt} + \frac{V^+}{RC} = 0$. En tenant compte de la condition initiale $V^+ = 2V_{sat}$, la solution est : $V^+ = 2V_{sat} \exp -\frac{t}{RC}$.

24. La solution précédente reste valable jusqu'à ce que $\epsilon = 0$. Or $\epsilon = 2V_{sat} \exp -\frac{t}{RC} - V_0$, la date de basculement est donc : $t_1 = RC \ln \frac{2V_{sat}}{V_0}$. À la date $t = t_1^-$, on a $U_C = V_{sat} - V_0$. Cette tension est continue et comme à la date $t = t_1^+$, $S(t) = -V_{sat}$, on a $V^+ = -V_{sat} - U_C$. Ceci nous permet d'écrire que : $V^+(t = t_1^+) = V_0 - 2V_{sat}$.

25. L'équation différentielle est inchangée. Par contre, la condition initiale évolue (elle a été déterminée à la question précédente). La solution de l'équation différentielle est donc : $V^+(t) = (V_0 - 2V_{sat}) \exp -\frac{t-t_1}{RC}$.

26. L'impulsion rectangulaire positive entre $t = T/2$ et $T/2 + \tau$ envoyée en entrée ne fait pas basculer la sortie de l'amplificateur opérationnel car $V^+(t > t_1) < 0$ et $V^- = U(t) > 0$. On a toujours $\epsilon = V^+ - V^- < 0$ et une saturation négative en sortie : $S(t) = -V_{sat}$.

27. Les trois chronogrammes représentant les trois graphes $V^-(t)$, $V^+(t)$ et $S(t)$ sont représentés sur la figure 5.

28. La forme rectangulaire des impulsions alternatives n'est pas déterminante pour le fonctionnement du module de sortie car on a pu voir que c'est la discontinuité de tension négative qui compte. En fait, c'est la valeur inférieure du pic qui déclenche ou non le basculement.

Étude du fréquencesmètre analogique

29. Dans la partie précédente, il fallait que $\tau \ll RC$. Or le temps caractéristique de l'impulsion étudiée ensuite est $R'C'$. Il faut, pour pouvoir appliquer les résultats étudiés avant, que : $R'C' \ll RC$.

30. Les chronogrammes représentant les signaux $e(t)$, $e'(t)$, $V^-(t)$, $V^+(t)$ et $S(t)$ sont donnés sur la figure 6.

31. $\langle S \rangle$ est mesurée en DC sur le contrôleur numérique car si on utilise cet appareil en AC (ou bien un oscilloscope), on passe à travers un filtre passe-haut dont le rôle est de couper la composante continue du signal étudié et cette composante continue n'est autre que la moyenne du signal.

32. Le signal $S(t)$ est créneau, le calcul de sa moyenne est simple : $\langle S \rangle = \frac{V_{sat}t_0 - V_{sat}(T-t_0)}{T}$. On obtient : $\langle S \rangle = V_{sat}(2ft_0 - 1)$. La fréquence du signal se mesure par : $f = \frac{1}{2t_0} (1 + \frac{\langle S \rangle}{V_{sat}})$. Toutes les grandeurs sont connues, en mesurant t_0 on accède à la fréquence f .

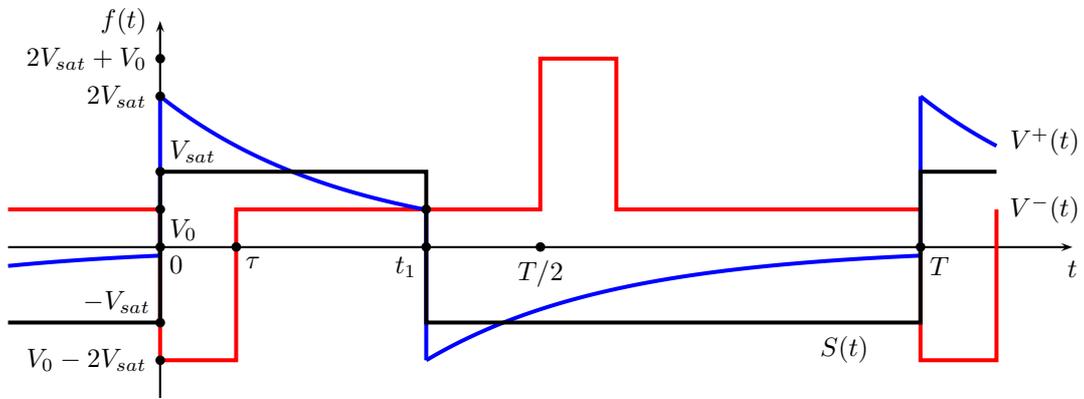


FIGURE 5 – Module de sortie du fréquencemètre

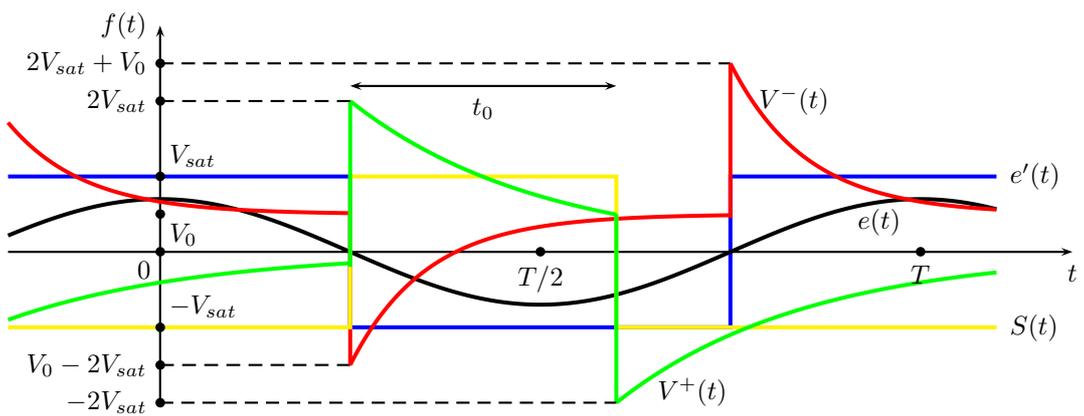


FIGURE 6 – Fréquencemètre analogique