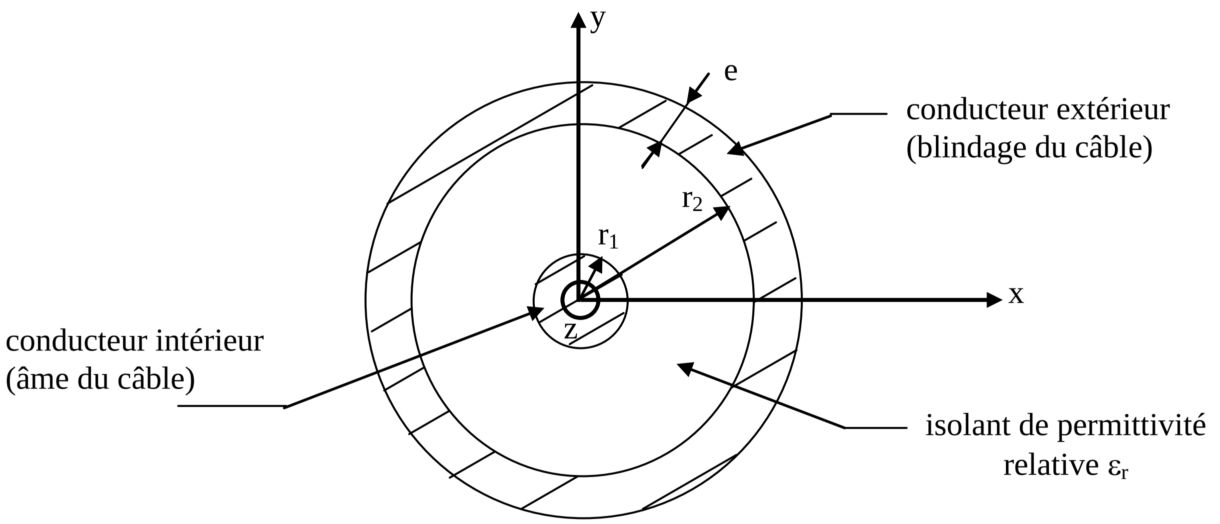
PSI – PSI 2016 – 2017*

DM PHYSIQUE N°3
A rendre le jeudi 17-11

Un câble coaxial est constitué par deux cylindres coaxiaux parfaitement conducteurs, de même axe Oz, et de rayons respectifs r_1, r_2 et (r_2+e), et de longueur ℓ. La longueur de la ligne ℓ est assez grande devant r_1 et r_2 pour que l'on puisse négliger les effets d'extrémités : on considère que **les symétries et invariances sont les mêmes que si la longueur ℓ était infinie**.

L'espace entre les deux conducteurs contient un isolant, homogène et isotrope de permittivité relative $\varepsilon_r = 2,0$. On rappelle que la permittivité absolue ε de l'isolant est liée à sa permittivité relative par la relation $\varepsilon = \varepsilon_o.\varepsilon_r$, la notation ε_o désignant la permittivité absolue du vide.



Pour les applications numériques, on prendra : r_1 = 0,15 cm, r_2 = 0,50 cm, ℓ = 10 m, e = 0,10 cm, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}, $\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}$ F.m^{-1}.

1. Le conducteur **intérieur** est porté au potentiel $\mathbf{V_1}$ constant et le conducteur **extérieur au potentiel $\mathbf{V_2}$, qu'on suppose nul**. Les conducteurs, en équilibre électrostatique, portent alors respectivement les charges + Q et – Q, supposées uniformément réparties sur les **deux seules** surfaces des conducteurs qui sont de rayon $\mathbf{r_1}$ et $\mathbf{r_2}$.

1.1. Montrer que le champ électrique est radial et que sa valeur algébrique ne dépend que de r, soit : $\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r$.

1.2.a. Etablir l'expression de E(r) en fonction de Q, de la permittivité $\varepsilon = \varepsilon_o.\varepsilon_r$ de l'isolant, de r et de ℓ, en distinguant les trois cas : $r < r_1$, $r_1 < r < r_2$ et $r_2 < r < (r_2+e)$. Il est rappelé que l'expression de E(r) demandée se déduit de celle obtenue dans le cas d'un câble coaxial « à vide » en remplaçant la permittivité absolue ε_o du vide par celle, ε, du matériau isolant.

1.2.b. Montrer que, dans le domaine $r > (r_2+e)$, $E(r) = 0$.

1.3.a. Tracer le graphe de E(r).

1.3.b. Commenter **physiquement** les éventuelles discontinuités de E(r) à la traversée des cylindres de rayons r_1 , r_2 et (r_2+e) .

1.4. Exprimer la tension $U_{12} = V_1 - V_2$ en fonction de Q, $\varepsilon = \varepsilon_o.\varepsilon_r$, ℓ, r_1 et r_2 .

1.5. Montrer que la capacité par unité de longueur du câble coaxial, notée C_1 , est donnée par :

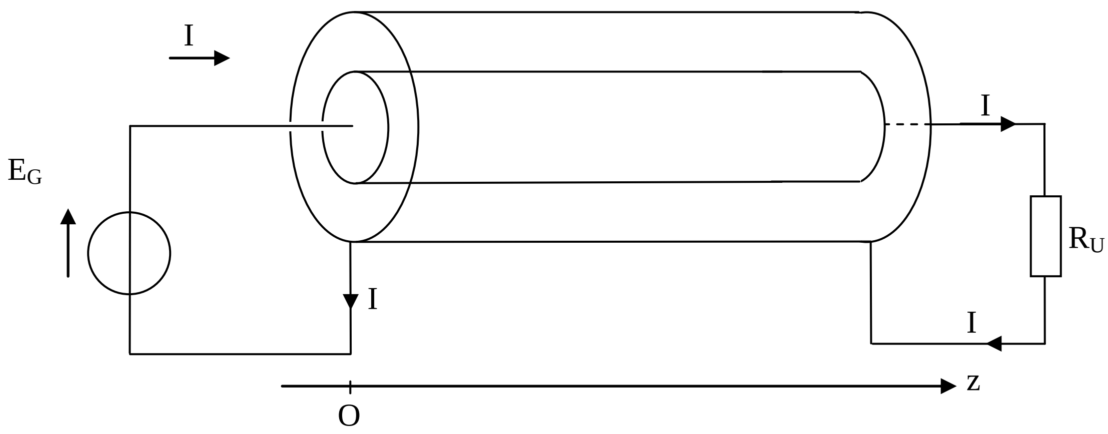
$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ .$$

1.6. En déduire **simplement** l'expression de l'énergie électrostatique W_e emmagasinée par le câble coaxial de longueur ℓ.

1.7. Calculer la valeur numérique de C_1.

1.8. Calculer la valeur numérique de W_e pour une tension U_{12} = 10 V entre les armatures du câble.

2. Le câble coaxial est chargé (à sa sortie) par une résistance R_u et alimenté en entrée par un générateur de tension continue E_G.



Le conducteur intérieur constitue le conducteur aller du courant électrique d'intensité I.
Le conducteur extérieur constitue le conducteur retour de ce courant.

Les conducteurs sont parcourus dans toute leur épaisseur par des courants volumiques de densités uniformes $\vec{j}_1$ et $\vec{j}_2$, de même direction que Oz. On considère de nouveau que **les symétries et invariances sont les mêmes que si la longueur ℓ était infinie**.

2.1. Montrer que le champ magnétique est orthoradial et que sa valeur algébrique ne dépend que de r, soit : $\vec{B} = B(r)\,\vec{u}_\theta$.

2.2. Etablir les expressions de B(r), en fonction de μ_o, I, r_1, r_2 et de e, en distinguant quatre domaines à définir.

2.3.a. Tracer l'allure du graphe de B(r).

2.3.b. Observe-t-on des discontinuités de B(r) à la traversée des cylindres de rayons r_1 , r_2 et (r_2+e) ? Aurait-on pu le prévoir avant de traiter les questions 2.1 à 2.2 ? Pourquoi ?

On rappelle l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique en un point de l'espace, en fonction du champ magnétique en ce point : $\varepsilon_{\text{vol,m}} = \frac{1}{2\mu_0} B^2$.

Dans toute la suite, on néglige, notamment pour alléger les calculs, la part de l'énergie magnétique emmagasinée dans l'âme - région $r < r_1$ - et celle localisée dans le blindage - région $r_2 < r < (r_2+e)$ - du câble coaxial.

2.4. Exprimer, **dans ces conditions**, l'énergie magnétique W_m emmagasinée par le câble coaxial de longueur ℓ, en fonction de μ_o, I, r_1, r_2 et de ℓ.

2.5. En déduire l'expression de l'inductance propre du câble coaxial par unité de longueur notée L_1.

2.6. Calculer la valeur numérique de L_1.

2.7. En utilisant le résultat de la question 1.5, former le rapport $\frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}}$; donner son unité et faire l'application numérique correspondante. Comparer ce résultat à la vitesse de la lumière dans le vide ; conclure en proposant une interprétation physique de cette quantité.

2.8. Le câble coaxial est parcouru par un courant d'intensité I = 0,10 A.
Calculer la valeur numérique de l'énergie magnétique W_m emmagasinée par le câble coaxial.

3. Les conducteurs intérieur et extérieur ont une conductivité $\gamma = 5{,}8.10^7$ S.m^{-1}.

3.1. Exprimer la résistance des conducteurs par unité de longueur, notée R_1, en fonction de γ, r_1 , r_2 , et de $r_3 = (r_2+e)$.

3.2. Calculer la valeur numérique de R_1.

3.3. On souhaite régler la tension E_G du générateur pour obtenir un courant d'intensité I = 0,20 A. La ligne est chargée par $R_u = 50\ \Omega$. Calculer la valeur numérique de E_G.