PSI* 2022 – 2023
Cordes d'instruments de musique
D'après CentraleSupélec PSI 2013

N.B. : Les notations sont celles du cours ;
l'équation (1) est l'équation de D'Alembert.

Question préliminaire

Proposer une expérience permettant de mesurer les fréquences propres d'une corde de piano ou de guitare. La description de l'expérience doit comporter au moins un schéma explicatif et le protocole expérimental.

Soit :

- une corde de guitare : masse linéique $\mu = 3$ g.m^{-1}, tension $T_0 = 103$ N ;
- une corde de piano : masse volumique $\rho = 7800$ kg.m^{-3}, tension $T_0 = 850$ N, diamètre $\phi = 1,2$ mm.

La corde de guitare permet de jouer une note de fréquence fondamentale (la plus basse des fréquences propres de la corde) 147 Hz (pour les musiciens, cette note est un ré$_2$). Quelle est sa longueur ? Quelle est la longueur de la corde de piano jouant la même note ?

Solution générale

On admet que la solution générale de l'équation (1) correspondant aux conditions aux limites $y(0,t) = y(L,t) = 0$ est une superposition des modes propres. On l'écrit sous la forme :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (2)$$

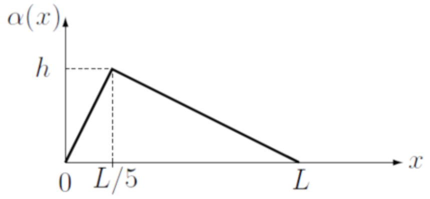
Les conditions initiales sont constituées par la donnée de :

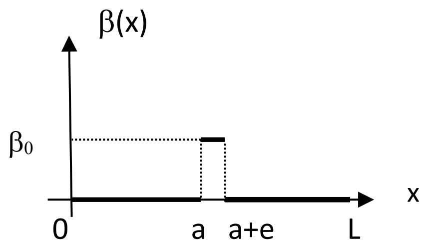
- la forme de la corde : $y(x,0) = \alpha(x)$,
- sa vitesse : $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \beta(x)$,

où $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont des fonctions définies sur $[0,\ L]$.

On s'intéresse aux fonctions $\tilde{\alpha}$(x) et $\tilde{\beta}$(x) définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, impaires, périodiques de période 2*L* et qui coïncident avec α(x) et β(x) sur l'intervalle [0, *L*].

a. On donne les fonctions α(x) et β(x) suivantes :





- L'une des fonctions correspond à une corde frappée, l'autre à une corde pincée : attribuez-les.
- Illustrer graphiquement la construction de $\tilde{\alpha}$(x) et $\tilde{\beta}$(x).

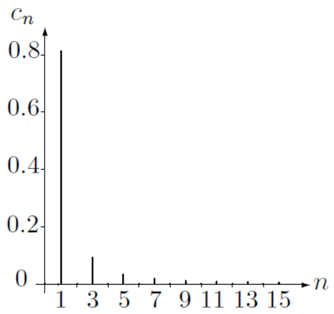
b. Expliquer comment les coefficients a_n et b_n peuvent être calculés à partir des fonctions $\tilde{\alpha}$(x) et $\tilde{\beta}$(x) ; ***les calculs ne sont pas demandés.***

Corde pincée

Une corde de longueur L est pincée puis lâchée sans vitesse à l'instant $t = 0$ (corde de guitare ou de clavecin par exemple).

Que valent les coefficients b_n ?

On donne le spectre pour une corde pincée à la moitié de sa longueur :

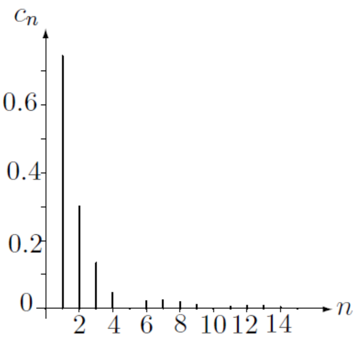


Corde pincée en $L/2$

Calculer les rapports c_3/c_1 et c_5/c_1 et montrer qu'ils sont bien en accord avec forme de la fonction $\tilde{\alpha}(x)$ correspondante.

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

On donne ensuite le spectre pour une corde pincée au 1/5$^{\text{ème}}$ de sa longueur :



Corde pincée en $L/5$

Quelle est le son le plus riche entre celui de la corde pincée au 1/5 et à la moitié ? On pourra prendre pour fixer les idées la fréquence fondamentale f = 147 Hz du B.1.h.

Corde frappée

Une corde de piano est frappée par un petit marteau à la distance $x_0 = sL$ de son extrémité $x = 0$.

a) Que valent les coefficients a_n ?

b) On peut montrer que les coefficients a_n associés à la corde pincée étudiée à la question 3 décroissent globalement comme $\dfrac{1}{n^2}$. En revanche les amplitudes des différents harmoniques de la corde frappée décroissent plutôt en $\dfrac{1}{n}$ (au moins à partir d'une certaine valeur de n).

Comparer alors les sons d'un clavecin (instrument à corde pincées) et d'un piano (instrument à corde frappées).

Quel(s) phénomène(s) essentiel(s) ont été oubliés dans ce modèle d'instruments à cordes.

Étude énergétique

1. a) Exprimer la densité linéique d'énergie cinétique e_C de la corde en mouvement en fonction de μ et de $\dfrac{\partial y}{\partial t}$.

b) On étudie la portion de corde située entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. Dans cette question, il est conseillé de travailler avec les variables $T_y = T_0 \dfrac{\partial y}{\partial x}$ et $v = \dfrac{\partial y}{\partial t}$.

i) Exprimer la puissance des forces extérieures à ce système.

ii) En appliquant le théorème de la puissance cinétique à ce système, exprimer la puissance des forces intérieures.

iii) En déduire que l'expression de la densité linéique d'énergie potentielle de la corde est :

$$e_P(x,t) = \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

en prenant l'énergie potentielle nulle quand la corde est au repos.

2. a) On étudie la corde dans le mode propre n. L'ébranlement est écrit sous la forme :

$$y_n(x,t) = c_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Montrer que l'énergie totale de la corde dans ce mode n s'écrit :

$$E_n = n^2 c_n^2 \frac{\pi^2}{4L} T_0$$

b) On considère maintenant la solution générale sous la forme :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Montrer que l'énergie E de la corde est :

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

Commenter.

3. On a vu précédemment que les amplitudes des différents harmoniques d'une corde pincée sont de la forme $c_n = \dfrac{c_1}{n^2}$ alors que ceux d'une corde frappée sont de la forme : $c'_n = \dfrac{c'_1}{n}$. Comparer les énergies des différents modes d'une corde de clavecin (corde pincée) et d'une corde de piano (corde frappée). Commenter.