PSI* 2024 - 2025
DM N°6 pour le 04-02-2025
Le Millenium Bridge

Simulation de la marche d'un piéton

L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. La modélisation en est donnée ci-dessous :

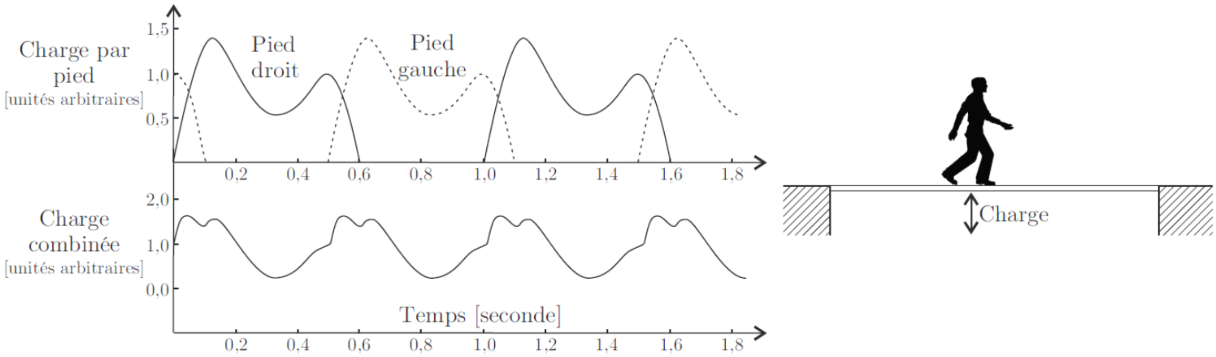


FIGURE 2 – Forçage d'une passerelle par la marche d'un piéton.

Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation.

L'acquisition est effectuée sur des durées allant de quelques secondes à quelques minutes. Les signaux ainsi obtenus sont similaires mais pas parfaitement identiques. Chacun de ces signaux présente les caractéristiques essentielles du signal de la charge combinée représentée sur la figure 2. On calcule alors le spectre de ces signaux en les échantillonnant en $N = 300$ points équidistants sur un intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$. Les différents spectres obtenus sont rassemblés sur la figure 4.

❏ **1 -** Analyser et interpréter aussi précisément que possible ces différents spectres. Sont-ils tous exploitables ? Lequel vous paraît le plus pertinent ? En déduire la (ou les) fréquence(s) caractéristique(s) de la marche étudiée. Etait-ce qualitativement prévisible ?

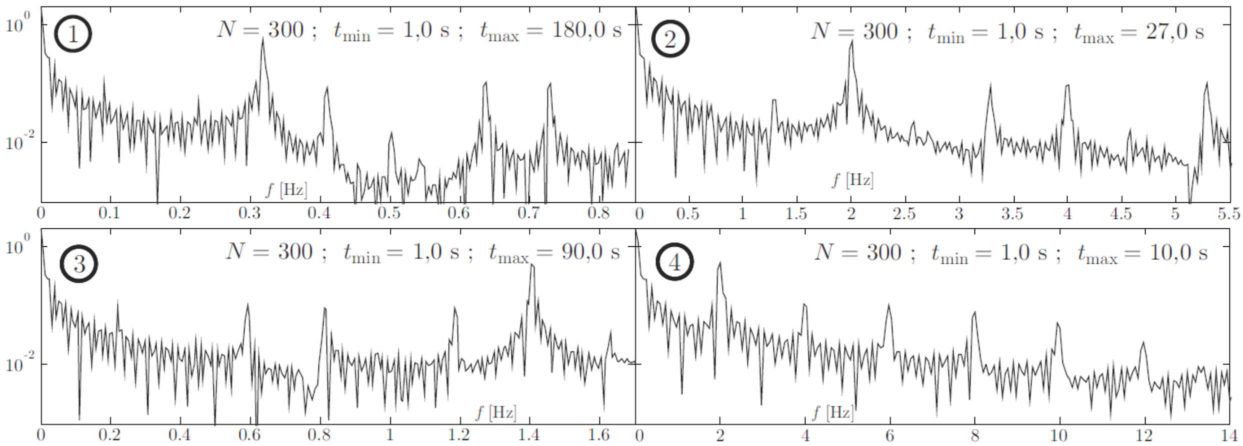
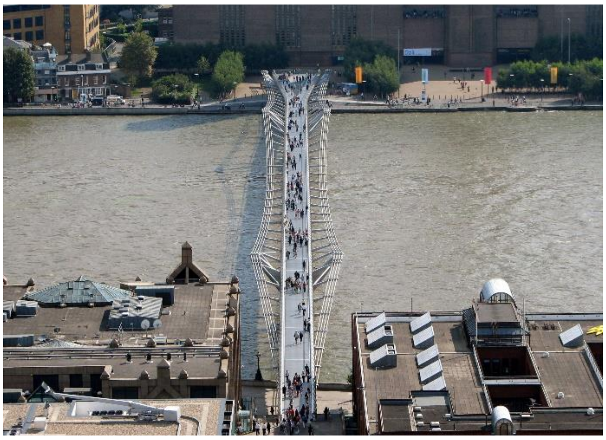


FIGURE 4 – Spectres des signaux correspondants à la marche d'un piéton

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaire pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées



❏ 2 - A partir de l'étude du 1-, expliquer le problème rencontré lors de l'inauguration du Millénium bridge.

II. — Système élastique continu

Les systèmes réels sont rarement discrets. Ainsi la poutre de structure d'une passerelle est déformable en tout point. Nous sommes donc en présence d'un problème de dynamique des milieux continus mais d'un point de vue pratique l'étude des systèmes continus se ramène finalement à celle liée aux systèmes discrets : c'est la discrétisation des systèmes continus.

On négligera dans la suite du problème l'action de la pesanteur.

On considère un solide homogène, de masse volumique ρ constante, qui a la forme d'un cylindre de section S et d'axe $(O,\widehat{u}_x)$ horizontal, le long duquel on étudie les petits mouvements de déformation.

Dans le domaine d'élasticité du matériau, la norme F de la force de traction permettant à un solide de longueur L de s'allonger de ΔL est donnée par la loi de Hooke : $F = ES\frac{\Delta L}{L}$ où E est une constante appelée module d'Young du matériau.

❏ 3 - Quelle est l'unité d'un module d'Young ? On motivera sa réponse pour laquelle on utilisera une seule unité du système international.

❏ 4 - On note $X(x,t)$ le déplacement par rapport à la position de repos d'une section plane d'abscisse x. Calculer la variation relative de longueur d'une tranche élémentaire du cylindre de longueur au repos dx et en déduire la force de traction $\overrightarrow{F}(x,t) = F(x,t)\widehat{u}_x$ exercée par la partie « droite » (du côté des x croissants) sur la partie « gauche » (du côté des x décroissants) en fonction de E, S et $\frac{\partial X}{\partial x}$. Écrire l'équation du mouvement de la tranche de longueur dx et en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $X(x,t)$.

III. — Modèle de la poutre élancée

Dans un modèle couramment utilisé, on peut assimiler une passerelle à une poutre homogène de section rectangulaire de largeur b selon $(O,\widehat{u}_z)$ et de hauteur h selon $(O,\widehat{u}_y)$. Pour des contraintes modérées, induisant un déplacement vertical petit devant les dimensions transversales de la poutre, c'est-à-dire $y(x)$ très petit devant h ou b, on peut alors se placer dans une extension du modèle de la corde.

On considère une passerelle de section S, de masse volumique ρ, de module d'Young E et dont le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe $(O,\widehat{u}_z)$ est $I = \frac{1}{12}bh^3$. L'écriture des contraintes conduit alors à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\rho S\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + IE\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

❏ 5 - On cherche des solutions sous la forme $y(x,t) = f(x)\,g(t)$. De quel type d'onde s'agit-il ? Sous quelles hypothèses de telles ondes apparaissent-elles dans ce genre de structure ?

❏ 6 - Déterminer les équations différentielles vérifiées par $f(x)$ et $g(t)$. En déduire que $g(t)$ est une fonction périodique de pulsation ω constante.

❏ 7 - Vérifier que l'on peut écrire :

$$f(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) + C\,\mathrm{ch}(\beta x) + D\,\mathrm{sh}(\beta x)$$

où A,B,C et D sont des constantes d'intégration, on précisera l'expression de β en fonction des données du problème.

On se place dans l'hypothèse d'une passerelle de longueur L en appui simple à ses extrémités, les conditions aux limites s'écrivent $y|_{x=0,t} = y|_{x=L,t} = 0$ et $\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=0,t} = \left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=L,t} = 0$.

❏ 8 - Déterminer les pulsations propres ω_n de vibration transversale d'une poutre en appui simple en fonction de L, E, I, ρ, S et d'un entier n caractérisant le mode.

❏ 9 - Différents modes de vibrations d'une passerelle ont été représentés sur la figure 6, quels sont ceux correspondants à l'étude proposée dans cette section ? Identifier de façon argumentée pour chacun de ces modes, l'entier n le caractérisant.

La passerelle du Millennium Bridge est globalement une poutre en aluminium de 322 m de longueur, d'épaisseur $h = 1{,}07\,\mathrm{m}$ (42 pouces) et de largeur $b = 4\,\mathrm{m}$ (158 pouces). Elle repose sur 4 appuis en créant 3 travées solidaires de $L_1 = 70\,\mathrm{m}$, $L_2 = 144\,\mathrm{m}$ et $L_3 = 108\,\mathrm{m}$. On donne la masse volumique de l'aluminium $\rho = 2700\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et son module d'Young $E = 69\times 10^9$ SI.

❏ 10 - Dans le cadre du modèle de la poutre sur appui simple, existe-t-il des modes de vibration transversale du Millennium Bridge susceptibles d'entrer en résonance avec un forçage par des piétons ?

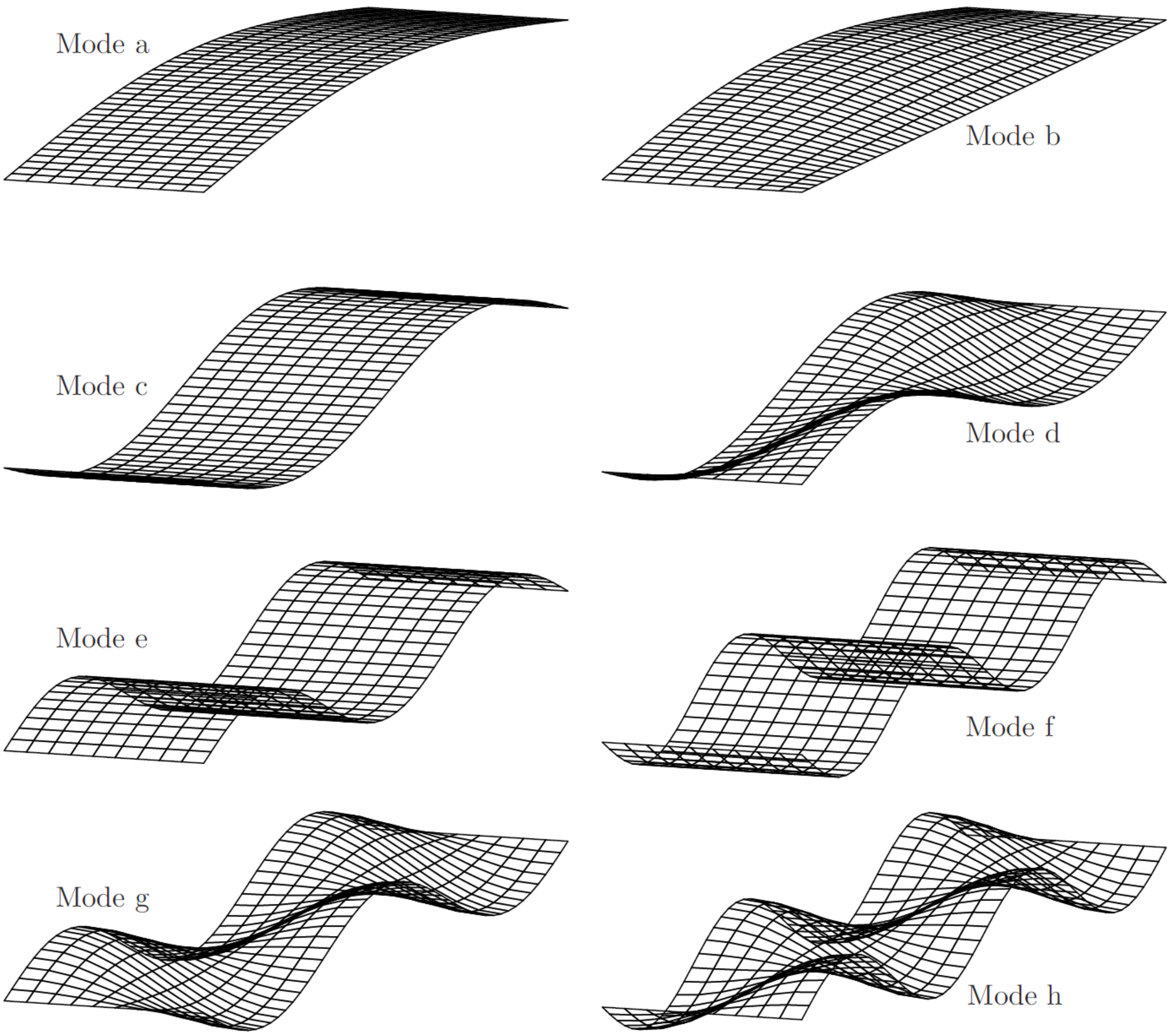


FIGURE 6 – Différents modes de vibration d'une passerelle en appui libre aux deux extrémités