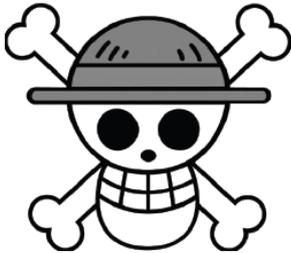


**PREMIER PROBLEME : CCINP 2023 - extrait**

La partie I - questions 1 à 9 - est facultative ; elle porte sur la mécanique du point et une approche mécanistique discrète de la propagation des ondes ; elle est cependant intéressante à traiter en vue de l'étude ultérieure des ondes que nous aborderons en janvier.



*One Piece* est une série de mangas Shōnen créée par Eiichirō Oda.

L'histoire suit les aventures de Monkey D. Luffy, un garçon dont le corps a acquis les propriétés du *caoutchouc* après avoir mangé par inadvertance un *fruit du démon*.

Avec son équipage de pirates, appelé l'équipage au *Chapeau de paille*, Luffy explore *Grand Line* à la recherche du trésor ultime connu sous le nom de *One Piece* afin de devenir le prochain *roi des pirates*.

**PARTIE I - *Gomu no jet pistol* : chaîne d'oscillateurs et onde mécanique**



*Luffy peut étendre ses bras, notamment en emmagasinant l'énergie potentielle élastique et frapper son adversaire. On se propose ici de modéliser un exemple d'extension élastique.*

**I.1 - Oscillateur harmonique**

Soit une molécule diatomique dont les deux atomes ne peuvent se déplacer que sur la direction ( $Ox$ ). En notant  $x$  la distance interatomique, l'énergie potentielle d'interaction s'écrit, selon la relation de Morse :

$$V(x) = V_0 \left[ 1 - e^{-a(x-x_0)} \right]^2$$

avec  $V_0$ ,  $a$  et  $x_0$  des constantes réelles positives.

**Q1.** Déterminer la distance interatomique d'équilibre, appelée longueur de liaison à l'équilibre  $x_{\text{éq}}$ .

On s'intéresse aux petits mouvements autour de la position d'équilibre :  $x = x_{\text{éq}} + \varepsilon$ , avec  $|\varepsilon| \ll x_{\text{éq}}$ .

**Q2.** En développant l'énergie potentielle  $V(x)$  au second ordre en  $\varepsilon$ , montrer que la force d'interaction résultante est équivalente à celle d'un ressort de constante de raideur  $k$  dont on donnera l'expression en fonction de  $V_0$  et de  $a$ .

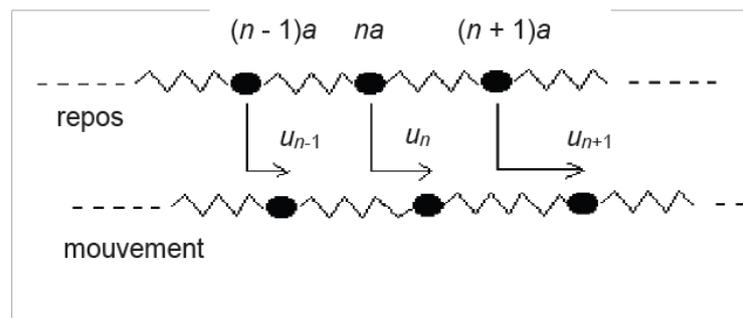
- Q3.** Si on appliquait cette force à une particule de masse  $m$  et de position  $\varepsilon(t)$ , quelle serait la pulsation des oscillations  $\omega_0$  de celle-ci ? Représenter la vibration au cours du temps  $t \rightarrow \varepsilon(t)$  pour des conditions initiales données :  $\varepsilon(0) = \beta$  et  $\dot{\varepsilon}(0) = 0$ .
- Q4.** Donner, sur le même graphique, l'allure des courbes représentatives de l'énergie potentielle de Morse et de l'énergie potentielle harmonique approchée en fonction de la distance interatomique.

## I.2 - Chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques

On considère une chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques identiques, de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ . Les masses sont toutes égales et désignées par des indices entiers successifs  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $m$  cette masse des masselottes entre les ressorts,  $\vec{r}_n(t) = x_n(t)\vec{u}_x$  le vecteur position de la  $n^{\text{ième}}$  masse et  $u_n(t)$  son déplacement par rapport à sa position d'équilibre. Le référentiel est supposé galiléen. On ne prend en compte que les interactions harmoniques entre les masses.

Initialement, à  $t = 0$ , la chaîne est au repos. La distance entre deux atomes successifs à l'équilibre (figure 1) est égale à la longueur à vide,  $\ell_0 = a$ .

On prend comme origine sur l'axe la position repérée par  $n = 0$  à  $t = 0$ .



**Figure 1** - Chaîne d'oscillateurs identiques

- Q5.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , écrire la position initiale de la  $n^{\text{ième}}$  masse ( $x_n(0)$ ) en fonction de  $n$  et de  $a$ . En déduire son écart  $u_n(t)$  par rapport à sa position d'équilibre en fonction de  $x_n(t)$ ,  $n$  et de  $a$ .

- Q6.** Établir que l'équation du mouvement de la  $n^{\text{ième}}$  masse, se met sous la forme :  $\ddot{u}_n = \omega_0^2 [u_{n+1} + u_{n-1} - \alpha u_n]$  avec  $\alpha$ , constante réelle à déterminer.

On s'intéresse à la propagation d'ondes mécaniques dans cette chaîne. On cherche à savoir s'il existe un réel  $q$  strictement positif tel que, en notation complexe, on puisse écrire :

$$\underline{u}_n(t) = U_0 \exp(i(\omega t - qna)) \text{ avec } i^2 = -1, \omega \text{ et } U_0 \text{ strictement positifs.}$$

- Q7.** Cette onde est-elle harmonique ? Que représentent  $U_0$  et  $\omega$  ?

Cette onde présente une périodicité spatiale s'il existe une  $p^{\text{ième}}$  masse (avec  $p > n$ ) telle que :  $\underline{u}_p(t) = \underline{u}_n(t)$ . On définit la longueur d'onde comme la plus petite distance séparant deux telles masses au repos.

**Q8.** Établir l'expression de la longueur d'onde  $\lambda$  en fonction de  $a$ . Que représente finalement  $q$  ?

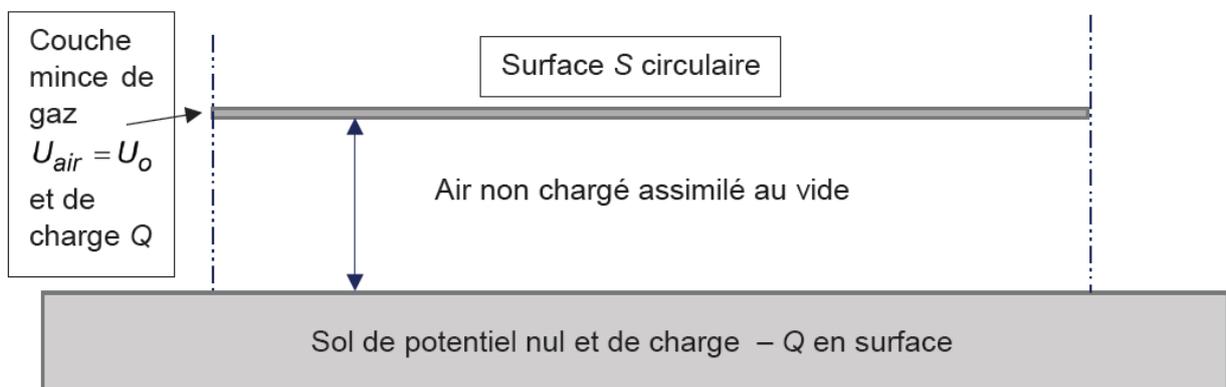
**Q9.** Montrer que la relation de dispersion, reliant  $\omega$  et  $q$ , est  $\omega^2 = 4\omega_0^2 \left( \sin \frac{qa}{2} \right)^2$ .

Représenter graphiquement la fonction :  $[q \mapsto \omega(q)]$  en se restreignant à l'intervalle  $\left[ 0, \frac{2\pi}{a} \right]$ .

## PARTIE II - *Kami no Sabaki* – Électrodynamique classique



*Enel (Eneru en VO) est l'antagoniste principal de l'Arc Skypiea. Son fruit du démon, le goro goro no mi, lui permet de produire de la foudre et du courant électrique en maîtrisant la formation de particules chargées....*



**Figure 3** - Condensateur créé par Enel

Les échelles ne sont pas respectées par souci de représentation.

Le pouvoir d'*Enel* lui permet d'imposer un potentiel à un volume d'air extrêmement fin au-dessus de lui. On s'intéresse ici au condensateur formé par cette surface d'air circulaire et le sol, localement plan (**figure 3**).

Dans cette modélisation, on pourra considérer deux disques (plans) parallèles de surfaces  $S$  distants de  $d$  avec  $d \ll \sqrt{S}$  de potentiels électriques respectifs  $U_{sol} = 0$  et  $U_{air}$  ( $U_{air}$  potentiel électrique de la couche d'air chargé). On négligera les effets de bord. On appellera  $(Oz)$  l'axe vertical ascendant dont l'origine est prise au sol et  $\vec{u}_z$  son vecteur unitaire.

On assimile l'air non chargé entre ces plaques au vide de permittivité  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ .

On se place ici en régime statique,  $U_{air} = U_0 = \text{constante positive}$  et on note  $\sigma_{air} = \sigma_0$  la densité surfacique des charges électriques de la surface d'air chargée.

**Q24.** Justifier que le champ électrique est de direction  $Oz$  :  $\vec{E} = E\vec{u}_z$ . Exprimer ce champ électrique créé dans l'espace  $0 < z < d$  en fonction de  $\sigma_0$  et de  $\epsilon_0$ .

**Q25.** En déduire la différence de potentiel  $U_0$  en fonction de  $\sigma_0, \epsilon_0$  et de  $d$ .

**Q26.** Calculer  $E$  et  $\sigma_0$  pour  $d = 5,0 \text{ m}$  et  $U_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ V}$ .

**Q27.** Doit-on craindre une telle tension ? On donne la valeur du champ disruptif de l'air dans les conditions d'étude :  $E_{disruptif}(\text{air}) = 3,6 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Le condensateur est soumis désormais à une tension alternative de basse fréquence  $f$ , de telle sorte que  $U_{air} = U_0 \cos(\omega t)$ . On travaillera en coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$ . On admet qu'à cette fréquence, la relation entre le champ électrique  $\vec{E}$  et le potentiel électrique est la même qu'en régime statique.

**Q28.** Écrire  $\vec{E}$  sous la forme  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$  avec  $E_0$  à préciser en fonction de  $U_0$  et des autres données de l'énoncé.

**Q29.** Rappeler les équations de Maxwell du champ électromagnétique.

**Q30.** Justifier l'existence d'un champ magnétique  $\vec{B}$  et montrer que  $\overline{B(M,t)} = B(r,z,t) \vec{e}_\theta$ .

**Q31.** Justifier que, si l'on reste dans l'espace entre les armatures, la circulation du champ magnétique le long d'un contour orienté s'écrit :  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_{\vec{E}}}{dt}$ , avec  $c$  et  $\Phi_{\vec{E}}$  à préciser.

En fait, la création d'un tel potentiel électrique augmente drastiquement la température, ionisant au passage l'atmosphère. L'air ne sera plus assimilé à du vide mais à un plasma, un milieu globalement neutre électriquement, partiellement ou totalement ionisé, contenant en moyenne et par unité de volume,  $n_e$  électrons libres de masse  $m_e$  et de charge  $q_e = -e$  et  $n_i = n_e$  ions  $X^+$ , de masse  $m_i$  et  $n_o$  atomes  $X$  de masse  $m_o$ .

L'atmosphère est à l'équilibre thermodynamique à une *haute* température  $T$ .

Intéressons-nous à l'environnement d'un ion  $X^+$  particulier dont la position sera prise pour l'origine  $O$ . Notons respectivement  $n_+$  et  $n_-$ , les densités volumiques d'ions et d'électrons en un point  $M$  situé à une distance  $r$  de l'origine. On se place dans le cadre de l'électrostatique.

**Q32.** Rappeler l'énergie potentielle d'une charge  $e$  placée en un point du plasma tel que le potentiel électrique en ce point soit égal à  $U$ . On suppose que ce potentiel ne dépend que de  $r$  :  $U = U(r)$ .

L'atmosphère est à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ . Elle suit donc la statistique de Boltzmann en  $\exp(-\frac{E_p}{k_B T})$ .

**Q33.** Justifier qu'à " très haute température ",  $n_+ = n_e \left(1 - \frac{eU}{k_B T}\right)$ . À quelle inégalité correspond la notion de " haute température " ?

**Q34.** En déduire  $n_-$ .

**Q35.** Représenter les fonctions  $[U \mapsto n_+(U)]$  et  $[U \mapsto n_-(U)]$ .

**Q36.** Comment s'écrit, dans ce milieu, l'équation de Poisson ? En déduire l'équation différentielle à laquelle obéit  $U(r)$ .

**Q37.** En posant  $Z(r) = rU(r)$ , montrer que la fonction  $Z(r)$  vérifie l'équation :  $\frac{d^2Z}{dr^2} - \frac{Z}{\lambda_D^2} = 0$  avec  $\lambda_D$  une constante à exprimer en fonction des données de l'énoncé.

**Q38.** Résoudre cette équation et montrer que le potentiel électrique s'écrit :

$$\text{pour } r \neq 0, U(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D}.$$

Interpréter ce que représente  $\lambda_D$ . Commenter.

**Q39.** En déduire la densité volumique de charge  $\rho(r)$  ainsi que la charge  $Q(r)$  contenue dans une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$ .

$$\text{On donne } \int_0^r r \exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right) dx = \left[1 - \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)\left(\frac{r}{\lambda_D} + 1\right)\right].$$

Erratum : Il faut lire  $x \exp(-\frac{x}{\lambda_D})$  dans l'intégrale ci-contre et multiplier le membre de droite par  $\lambda_D^2$

On (re)considère deux disques (plans) parallèles de surface  $S$  distants de  $d$  avec  $d \ll \sqrt{S}$  de charges surfaciques électriques respectives  $\sigma_{air} = \sigma_0$  (pour la surface d'air chargée) et  $\sigma_{sol} = -\sigma_0$  (au sol). On négligera les effets de bord. On appellera  $(Oz)$  l'axe vertical ascendant dont l'origine est prise au sol et  $\vec{u}_z$  son vecteur unitaire.

À l'instant initial ( $t = 0$ ), suite à l'élévation brutale de température, l'air contenu entre ces deux plans devient un conducteur ohmique, caractérisé par sa conductivité électrique  $\gamma$ . Cet air, entre les plaques, est supposé rester localement neutre. La relation entre le champ électrique  $\vec{E}$  et le potentiel électrique est supposée être la même qu'en régime statique.

**Q40.** Quelle est l'unité (ou la dimension) de  $\gamma$  ?

**Q41.** Déterminer la densité volumique de courant  $\vec{j}$  en fonction de  $\sigma_{air}(t)$  et des données de l'énoncé.

**Q42.** Montrer que l'équation différentielle relative à la densité surfacique de charge d'air s'écrit :  $\frac{d\sigma_{air}}{dt} + \frac{\sigma_{air}}{\tau} = 0$ , avec  $\tau$  une constante de temps à exprimer en fonction des données de l'énoncé.

**Q43.** Représenter  $[t \mapsto \sigma_{air}(t)]$  en faisant apparaître  $\sigma_0$  et  $\tau$ .

**Q44.** Calculer le temps caractéristique de décharge  $\tau$  ainsi que la densité de courant arrivant au sol à l'instant initial pour  $\gamma = 1,0 \cdot 10^{20}$  USI et  $\sigma_0 = 1,0 \cdot 10^8$  C · m<sup>-2</sup>.

*Grâce au fulguro-fruit, Enel peut rendre l'air conducteur et faire propager un courant électrique d'intensité gigantesque, le rendant tout puissant face à tout élément conducteur...*

## Développement de Taylor

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ ,  $\forall h \in \mathbb{R}, (x_0 + h) \in I$ ,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_{x=x_0} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} \Big|_{x=x_0} + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} \Big|_{x=x_0} + o(h^n)$$

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} \frac{d^k f}{dx^k} \Big|_{x=x_0} + o(h^n).$$

## Trigonométrie

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1$$

## Analyse vectorielle

- $\operatorname{div}(\vec{\operatorname{grad}}) = \Delta$

- Coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

## Théorème de Stokes - Ampère

Pour un champ de vecteur  $\vec{A}$  de classe suffisante, le théorème de Stokes-Ampère s'écrit :

$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \operatorname{rot}(\vec{A}) \cdot d\vec{S}$  avec  $C$  une courbe fermée bordant la surface à travers laquelle on calcule le flux de  $\operatorname{rot}(\vec{A})$ . L'orientation du contour  $C$  donne l'orientation du vecteur  $d\vec{S}$ .

## SECOND PROBLEME : TORNADE – D'après CCINP PSI

1. Énoncer les quatre équations de MAXWELL.
2. Retrouver l'équation de conservation de la charge à partir de deux des équations précédentes. On rappelle que  $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{A})) = 0$ , pour un champ de vecteur  $\vec{A}$  quelconque.
3. Indépendamment de la question précédente, et à partir d'un bilan de charge sur un volume élémentaire  $d\tau$ , démontrer l'équation précédente pour une géométrie cartésienne unidimensionnelle (on appellera  $x$  la coordonnée correspondante).
4. Donner les analogies formelles permettant de transposer l'équation de la question 2. en une équation de conservation en mécanique des fluides.

On peut modéliser simplement une tornade (**photo 3**) en considérant l'air comme un fluide parfait en écoulement stationnaire et incompressible de masse volumique  $\rho_0$ . Cet écoulement est qualifié de rotationnel à l'intérieur d'un cylindre  $C$  d'axe  $Oz$  et de rayon  $R_T$ . On définit le vecteur tourbillon  $\vec{\omega}$ , tel que :  $\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = 2\vec{\omega}$ , où  $\vec{v}$  est le champ des vitesses de l'écoulement.

On a :  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ , avec  $\begin{cases} \omega = \omega_0 & \text{pour } r < R_T \\ \omega = 0 & \text{pour } r > R_T \end{cases}$   $\omega_0$  est une constante.



**Photo 3** - Tornado

5. Que devient l'équation de conservation de la question 4. dans le cadre d'un écoulement stationnaire, incompressible homogène ?
6. Que deviennent les équations de Maxwell relatives au champ magnétique en régime stationnaire ? Les comparer aux équations locales vérifiées par le champ des vitesses.
7. A partir de l'une d'elles, démontrer le théorème d'Ampère. Toujours à partir des analogies de la question 4., donner l'équivalent du théorème d'Ampère en mécanique des fluides, avec les hypothèses de stationnarité et d'incompressibilité.
8. Déterminer le champ des vitesses pour un point quelconque de l'espace, en appliquant soigneusement ce théorème. Tracer la fonction  $v(r)$ .
9. Rappeler les hypothèses d'application du théorème de Bernoulli. On suppose que ces hypothèses sont valables dans la zone  $r > R_T$ . En considérant la pression de l'air égale à  $P^\circ$  loin du cyclone, préciser l'expression de la pression  $P(R_T)$  à la surface de la tornade, en fonction de  $P^\circ$ ,  $\rho_0$ ,  $\omega_0$  et  $R_T$ .
10. Évaluer dans le cadre de ce modèle simplifié la dépression  $\Delta P = P^\circ - P(R_T)$  pour des vents de 180 km/h à la surface de la tornade en  $R_T$ . On donne  $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$ .
11. La masse d'une tuile en terre cuite est d'environ 2,8 kg. Le faible recouvrement offre une densité surfacique de masse réduite de la couverture, de l'ordre de  $40 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}$ . Justifier de la nécessité du collage des tuiles sur le toit dans les zones particulièrement ventées.