PSI / PSI* 2024-2025

DM N°5

A rendre le mardi 7 janvier 2025

PARTIE I : Géophysique de la planète Terre

Ce sujet propose de traiter de diverses applications de la physique à l'étude de la planète Terre. On s'intéresse dans un premier temps aux méthodes de mesure du champ de pesanteur terrestre (gravimétrie) puis à leurs applications dans le génie civil. Dans un deuxième temps, on étudie les méthodes de prospection électrique des sols utilisées pour sonder des terrains.

Un ensemble de valeurs numériques est disponible en fin d'énoncé.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'expliciter clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

I Champ gravitationnel et champ de pesanteur terrestre

I.A – Champ gravitationnel créé par la Terre

Q 1. Énoncer le théorème de Gauss appliqué à la gravitation en précisant les analogies entre forces électrostatiques et gravitationnelles. On notera $\vec{\mathcal{G}}$ le champ gravitationnel.

La Terre est assimilée à une boule homogène de rayon R_T, de centre C et de masse M_T uniformément répartie en volume. On repère un point M de l'espace dans le système de coordonnées sphériques d'origine C, associé à la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$. On appelle $z = r - R_T > 0$ l'altitude d'un point M situé à l'extérieur de la Terre et on associe à ce point un axe (Oz) (verticale du lieu) dont l'origine O est en $r = R_T$ et tel que $\vec{e}_z = \vec{e}_r$.

Q 2. Déterminer l'expression du champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}_T$ créé par la Terre à une altitude $z > 0$.

I.B – Variation du champ gravitationnel avec l'altitude

Soit un corps de masse m, assimilé à un point matériel, situé à la distance $r = R_T$ du centre C de la Terre (altitude $z = 0$). On définit le vecteur unitaire local $\vec{u}$ perpendiculaire à l'axe (Δ) de rotation de la Terre sur elle-même (figure 1).

Q 3. Montrer que l'intensité du champ gravitationnel selon la verticale s'écrit, pour $z \ll R_T$: $\mathcal{G}_T(z) \approx \dfrac{GM_T}{R_T^2}\left(1 - 2\dfrac{z}{R_T}\right)$.

Q 4. Calculer l'altitude dont il faut s'élever pour observer une variation de 1,00% de $\mathcal{G}_T$.

Q 5. Donner l'expression du gradient vertical du champ gravitationnel. Que représente-t-il physiquement ?

Q 6. Les géophysiciens utilisent comme unité de mesure du champ de pesanteur le gal avec $1\,\text{gal} = 1{,}00\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$. Évaluer la valeur du gradient exprimée en $\mu\text{gal}\cdot\text{cm}^{-1}$ et commenter.

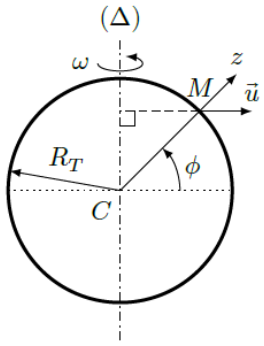

Figure 1

IV Applications de la gravimétrie

La gravimétrie est l'étude des variations du champ de pesanteur dans l'espace et dans le temps. Elle permet de déterminer la répartition des masses au sein de la Terre et d'avoir ainsi accès à sa structure. Par exemple, la gravimétrie est utilisée pour déterminer la forme de la Terre (géodésie), pour détecter des cavités (génie civil ou archéologie), pour suivre les stockages d'eau (hydrologie continentale).

Dans cette partie, nous allons déterminer, par une analyse gravimétrique, les dimensions d'un corps sphérique enterré dans un sol de masse volumique moyenne μ_m (figure 7).

dans cette partie, pesanteur et gravitation sont confondues

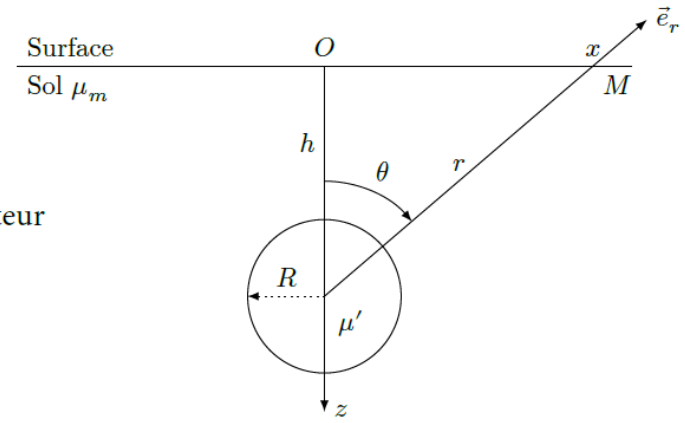

Figure 7

Q 28. En utilisant le théorème de Gauss gravitationnel, déterminer l'expression du champ de pesanteur en un point M situé à l'extérieur d'une sphère homogène de rayon R et de masse volumique $\mu' = \mu_m + \Delta\mu$ en fonction de μ_m, $\Delta\mu$, G, R, r, distance de M au centre de la sphère, et du vecteur unitaire $\vec{e}_r$ (figure 7).

Le corps sphérique se trouve à une profondeur h dans le sol. Loin de la sphère (pour $r \gg R$), le champ de pesanteur est vertical selon Oz de valeur g_0.

Q 29. Déterminer g_{Bz}, la composante verticale du champ de pesanteur créé par la boule au point M situé à une distance x de la verticale.

Q 30. Montrer que l'anomalie gravimétrique $\Delta g = g_z - g_0$, qui fait varier le champ de pesanteur apparent en un lieu, est identique au champ de pesanteur g'_z créé par une sphère de masse volumique $\Delta\mu$.

Q 31. Montrer que l'anomalie gravimétrique s'écrit

$$\Delta g = \frac{4\pi G \Delta\mu R^3 h}{3(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

Q 32. Tracer l'allure de la courbe Δg en fonction de x pour des sphères identiques enterrées à deux profondeurs différentes h_1 et $h_2 > h_1$.

Q 33. Quel est le lien entre la profondeur h et la largeur à mi-hauteur de la courbe ? Que vaut l'anomalie gravimétrique maximale ?

Q 34. Déterminer, à l'aide la courbe de la figure 8, la profondeur h et le rayon R de la sphère enterrée.

Q 35. Comment rendre indétectable par analyse gravimétrique de l'or stocké dans une grotte sphérique ?

Q 36. La grotte de 1 m de rayon est à 4 m de profondeur. Quelle masse d'or est-il possible de cacher par cette méthode ? Pour information, la masse volumique de l'or est $\rho_{or} = 19\,300\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Q 37. Une étude archéologique préalable prévoit la disposition de deux grottes sphériques de même dimension (figure 9). Tracer l'allure de la courbe de l'anomalie gravimétrique attendue $\Delta g = f(x)$ en vous aidant de la figure 10.

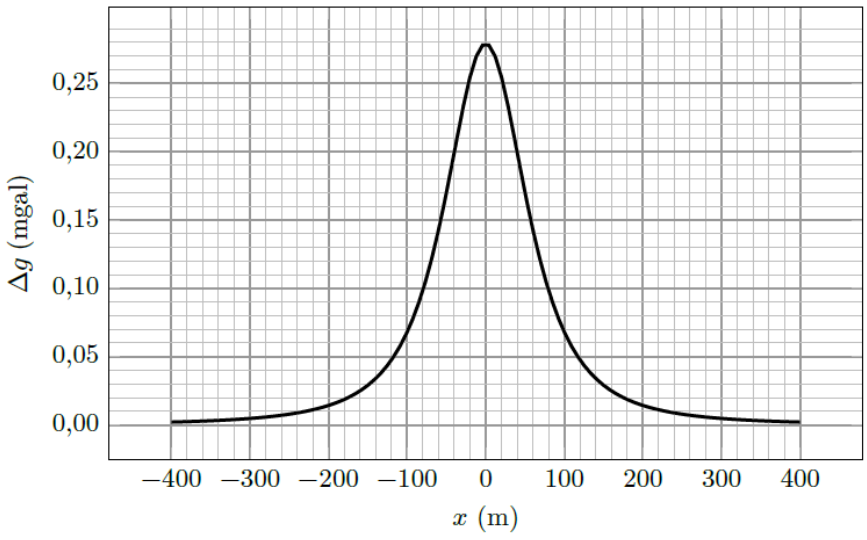

Figure 8 Anomalie gravimétrique Δg pour une sphère enterrée avec $\Delta\mu = 1000\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

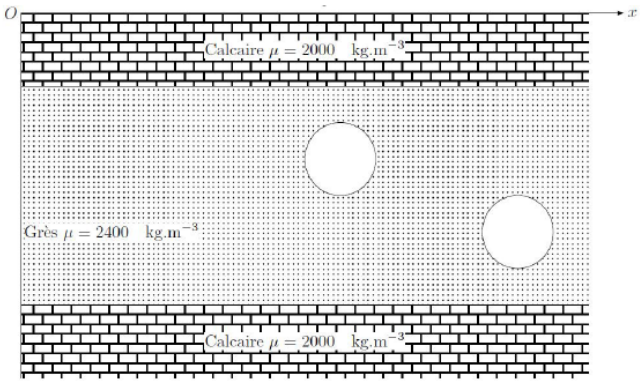

figure 9 modélisation géologique de la disposition des deux grottes

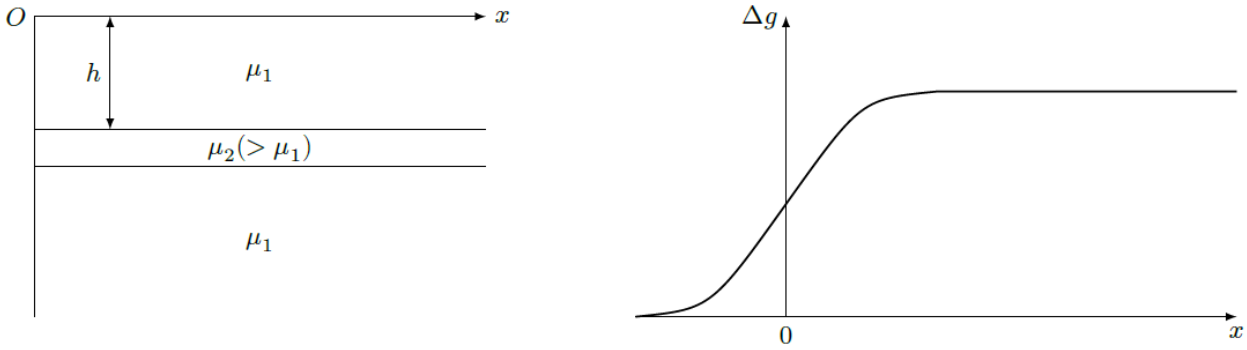

Figure 10 Anomalie gravimétrique pour une plaque horizontale semi-infinie

V Prospection électrique des sols

La prospection électrique est l'une des plus anciennes méthodes de prospection géophysique. Elle repose sur l'interprétation de la résistance électrique du terrain. Ces mesures doivent être réalisées *in situ*, cette mesure ne pouvant être réalisée en laboratoire sur un échantillon sorti de son environnement. Elles sont particulièrement adaptées à l'étude des faibles profondeurs.

V.A – Sol homogène

Q 38. Exprimer la résistance électrique d'un parallélépipède homogène de longueur L, de section A et de résistivité $\rho = 1/\sigma$ où σ est la conductivité électrique du matériau (figure 11).

Pour déterminer la résistance électrique d'un terrain on impose la circulation d'un courant continu d'intensité I à la surface du sol qui se répartit en profondeur. Cette opération est réalisée grâce à des électrodes que l'on plante dans le sol aux points A et B (figure 12). La tension est mesurée à l'aide d'un voltmètre entre les points M et N.

Q 39. Dans la pratique on utilise un courant alternatif très basse fréquence. Pour quelle raison ?

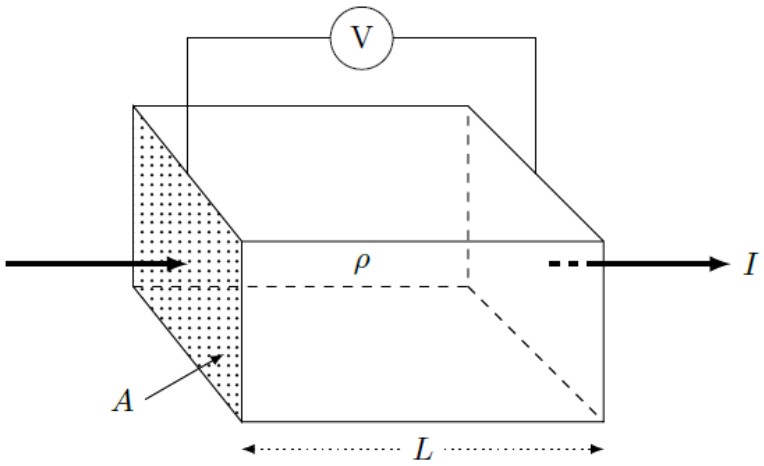

Figure 11

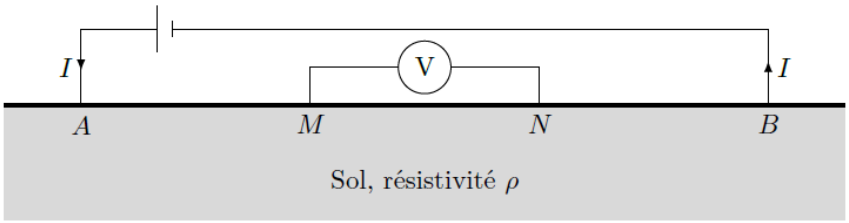

Figure 12

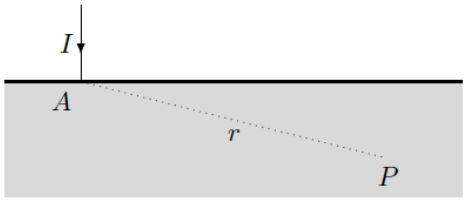

Figure 13

Q 40. Considérons seulement l'électrode placée en A (figure 13). On note $\vec{\jmath}(r)$ le vecteur densité volumique de courant au point P. La terre est considérée comme homogène. Quelle est la forme des lignes de courant dans la terre ? Donner l'expression de $\vec{\jmath}(r)$ en fonction notamment de l'intensité du courant I et de r.

Q 41. Exprimer le champ électrique $\vec{E}(r)$ et le potentiel électrique $V_A(r)$ au point P en fonction de I, r et ρ. On suppose que la valeur du potentiel est nulle à grande distance.

Q 42. Dans le cas des deux électrodes (figure 14), exprimer le potentiel électrique V au point P en fonction de ρ, r_A, r_B et I. On suppose que la valeur du potentiel est nulle à grande distance. Quelle relation définit les équipotentielles ?

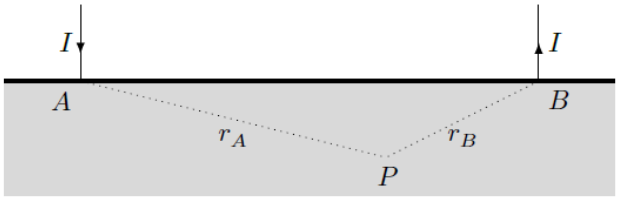

Figure 14

Q 43. Exprimer la différence de potentiel $\Delta V = V_M - V_N$ lue sur le voltmètre (figure 12). Montrer que la résistivité s'écrit $\rho = \dfrac{2\pi\Delta V}{If}$ où f est le facteur géométrique à exprimer en fonction des distances MA, MB, NA et NB.

Q 44. Dans le cas de la configuration dite de Wenner (figure 15), les points A, M, N et B sont équidistants espacés de la longueur ℓ. Exprimer le facteur géométrique f.

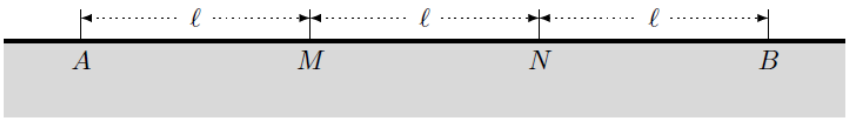

Figure 15

Q 45. Les courbes de la figure 16 présentent le résultat de la simulation des équipotentielles tracées pour deux électrodes distantes de 10 m situées en ±5,0 m plantées dans un terrain de résistivité $\rho = 100\ \Omega\cdot$m. L'intensité du courant est $I = 0{,}50$ A. Que vaut le facteur géométrique correspondant dans la configuration de Wenner ? Cette valeur est-elle en accord avec la simulation de la figure 16 ?

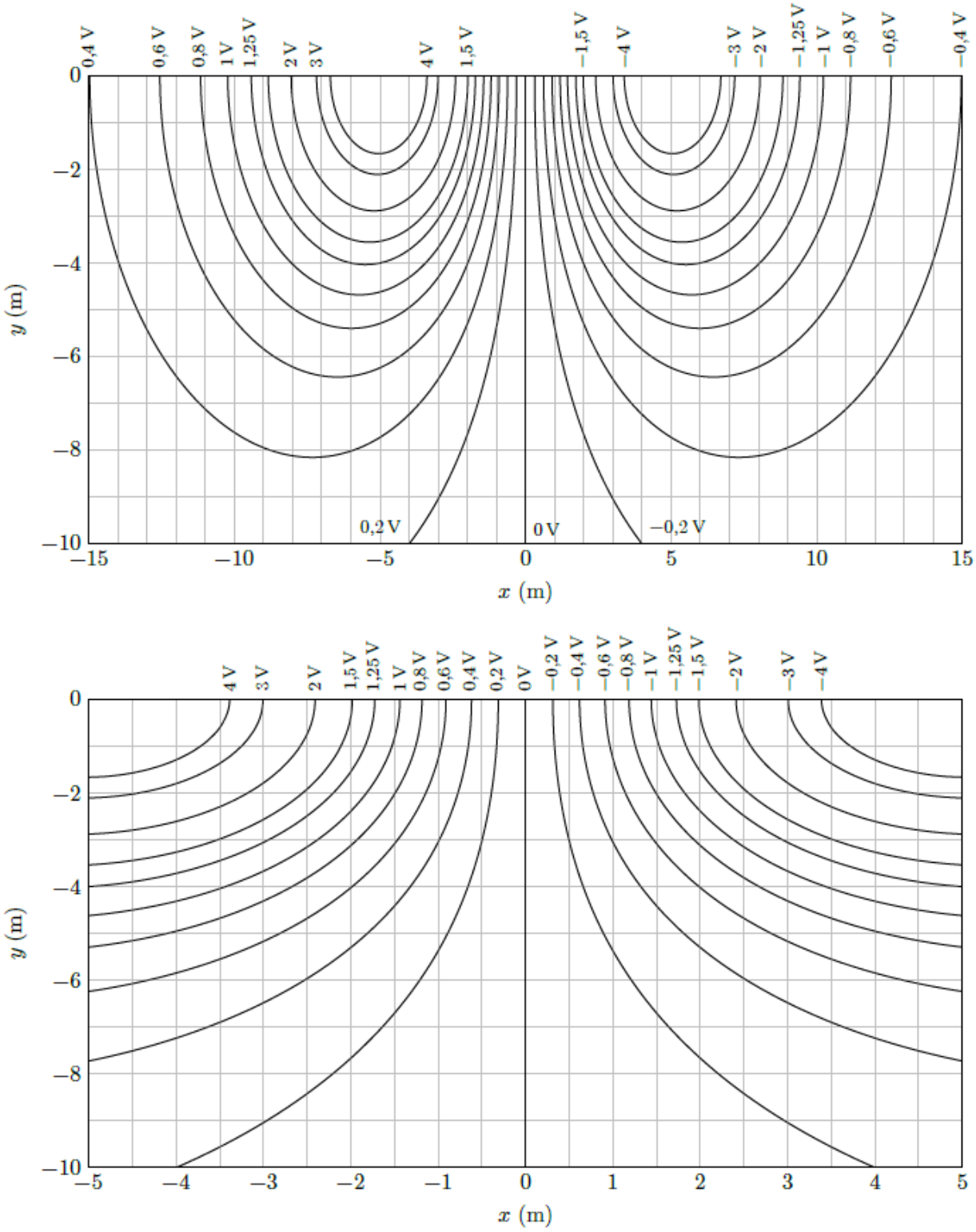

Figure 16

Q 46. Tracer, en expliquant votre démarche, l'allure des lignes de courant.

Données numériques

Constante de gravitation universelle	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^3\cdot\text{s}^{-2}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6{,}37 \times 10^3\ \text{km}$
Masse de la Terre	$M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\ \text{kg}$
Unité de mesure de la pesanteur	$1\ \text{gal} = 1{,}00\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$
Ordre de grandeur de la sensibilité des gravimètres actuels	$\Delta g = 1\ \mu\text{gal}$

PARTIE II : Un modèle électrostatique de l'atmosphère

1- L'état électrique de l'atmosphère, par beau temps, peut être modélisé comme suit :
Le sol et l'ionosphère (haute atmosphère), parfaitement conducteurs, forment les armatures d'un condensateur sphérique dont l'atmosphère constitue le diélectrique.

Diverses mesures montrent que le champ électrique au niveau du sol est de l'ordre de 150 V/m et que la terre est chargée négativement.

a) Déterminer la capacité d'un condensateur dont l'une des armatures est une sphère de rayon R_1 et l'autre une sphère de rayon $R_2 > R_1$ concentrique à la précédente.

Faire l'application numérique pour $R_1 = 6{,}4.10^3$ km et $(R_2 - R_1) = 15$ km.
La constante diélectrique est pratiquement celle du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}84.10^{-12}$ F/m.

b) Quelles sont la charge totale de la terre et la différence de potentiel entre le sol et la haute atmosphère ?

2- En fait, l'atmosphère est légèrement conductrice en raison de la présence d'ions des deux signes capables de se déplacer sous l'action du champ électrique régnant dans l'atmosphère.
On considère en particulier les "petits ions" de charge positive ou négative $e = \pm 1{,}6.10^{-19}$ C.
La mobilité des ions positifs est $\mu_+ = 1{,}4.10^{-4}$ m^2/V.s et celle des ions négatifs est $\mu_- = 1{,}9.10^{-4}$ m^2/V.s.

a) Déterminer le vecteur densité de courant volimique de conduction des ions. En déduire le courant global air - terre pour l'ensemble du globe. On prendra pour valeur moyenne de la concentration en ions de chaque signe $c = 500$ cm^{-3}. On supposera que la présence des ions ne modifie pas le champ qui règne dans l'atmosphère.

b) Quel est le temps au bout duquel la charge terrestre serait réduite au centième de sa valeur initiale par l'apport de charges de signe contraire, en admettant que le courant dû au phénomène précédent soit le seul en cause ?