

## I Champ gravitationnel et champ de pesanteur terrestre

### I.A Champ gravitationnel créé par la Terre

- La force électrostatique exercée dans le champ  $\vec{E}$  sur une particule d'épreuve de charge  $q$  est  $\vec{F} = q\vec{E}$ , tout comme la force de gravitation exercée dans le champ  $\vec{G}$  sur une particule d'épreuve de charge  $m$  est  $\vec{F} = m\vec{G}$ . De plus, le champ électrostatique créé en  $M$  par une charge ponctuelle  $q_0$  en  $P$  est  $\vec{E} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$  alors que le champ gravitationnel créé en  $M$  par une masse ponctuelle  $m_0$  en  $P$  est  $\vec{G} = -Gm_0 \frac{\vec{PM}}{PM^3}$ . De ce fait, le théorème de Gauss électrostatique  $\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{int}}$  devient  $\oiint_{(S)} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM_{\text{int}}$  : le flux du champ de gravitation à travers une surface  $(S)$  fermée et orientée vers l'extérieur est proportionnel à la masse  $M_{\text{int}}$  située à l'intérieur de cette surface  $(S)$ . Dans cette expression,  $G$  est la constante de la gravitation universelle.
- Les propriétés de symétrie de la Terre permettent d'abord de déterminer la direction de ce champ : au point  $M$ , tout plan contenant  $CM$  est un plan de symétrie des masses donc le champ de gravitation  $\vec{G}(M)$  est contenu dans chacun de ces plans, donc dans leur intersection  $\overrightarrow{CM}$  et on peut écrire  $\vec{G}(M) = \mathcal{G}(M)\vec{e}_r$ . De plus, le problème physique est invariant par toute rotation autour de  $C$  donc l'intensité  $\mathcal{G}(M)$  ne peut dépendre que de  $r = CM$  et  $\vec{G}(M) = \mathcal{G}(r)\vec{e}_r$ . On peut finalement appliquer le théorème de Gauss à une sphère de centre  $C$  et de rayon  $r$  pour laquelle  $\oiint_{(S)} \vec{G} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \mathcal{G}(r)$ . Si  $r > R_T$  cette sphère contient toute la masse  $M_T$  de la Terre donc  $\vec{G}(M) = -\frac{GM_T}{r^2}\vec{e}_r$  où  $r = R_T + z$ .

### I.B Variation du champ gravitationnel avec l'altitude

- L'intensité du champ gravitationnel est  $\mathcal{G}_T(z) = \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2}$  soit, dans un développement au premier ordre,  $\mathcal{G}_T(z) \simeq \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - 2\frac{z}{R_T}\right)$ .
- Une variation de 1% de cette intensité correspond à  $\frac{2z}{R_T} = 10^{-2}$  donc  $z = \frac{10^{-2}}{2} R_T = 31,9 \text{ km}$ .
- On définit ce gradient par  $\vec{H} = \overrightarrow{\text{grad}} \left( \|\vec{G}_T(z)\| \right) = -\frac{2GM_T}{R_T^3} \vec{e}_z$  ; il est dirigé vers les zones de champ fort (vers le sol) et décrit la variation (ici, la diminution avec l'altitude) de champ de gravitation.
- $1 \mu\text{gal} \cdot \text{cm}^{-1} = 10^{-6} \text{ s}^{-2}$  ; Comme  $\|\vec{H}\| = 3,08 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$  on a  $\|\vec{H}\| = 3,08 \mu\text{gal} \cdot \text{cm}^{-1}$ .

## II Méthodes de mesure du champ de pesanteur à l'aide de pendules

### II.A Le pendule de Richter

- La période des petites oscillations du pendule,  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ , dépend de  $g$  donc permet de remonter à une mesure de  $g$ .
- Un pendule qui retarde a une période d'oscillation plus grande (il marque moins de périodes dans la même durée). Le pendule de Richter a donc une période à Cayenne  $T_C$  plus grande que celle  $T_P$  à Paris dans un rapport  $\frac{T_C}{T_P} = 1 + \frac{2 \min 28 \text{ s}}{1 \text{ j}} = 1 + 1,7 \cdot 10^{-3}$ . En supposant que la longueur du pendule est inchangée, on a donc  $\frac{g_P}{g_C} = (1 + 1,7 \cdot 10^{-3})^2 = 1 + 3,4 \cdot 10^{-3}$  donc  $g_C = 9,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . L'écart en altitude ne peut être invoqué ici puisqu'il vaut au maximum  $\Delta z = 131 \text{ m}$  avec  $\frac{2\Delta z}{R_T} = 7 \cdot 10^{-5}$  ; il s'agit donc essentiellement d'un écart entre termes d'inertie.

9. De la relation  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$  on tire, en assimilant les incertitudes à des différentielles,  $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}$ . Comme le pendule bat la seconde,  $T = 1\text{ s}$  et  $g = 9,8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  donnent, avec  $\Delta g = 10^{-8}\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  une incertitude à atteindre

$$\Delta T = \frac{T}{2} \frac{\Delta g}{g} \simeq 5\text{ ns} !$$

### III Gravimètre à fléau de LaCoste et Romberg

10. On peut par exemple imaginer que la hauteur  $y$  est initialement réglée de sorte que le système soit à l'équilibre avec la tige horizontale ( $\theta = 0$ ). Une petite variation du champ de pesanteur fait pivoter la tige (vers le bas,  $\theta > 0$  si  $g$  augmente et donc le ressort s'allonge, tandis que l'angle entre le ressort et la tige diminue : la variation du couple de rappel est donc faible, permettant de détecter de faibles variations  $\Delta g$ . On peut effectuer la lecture de  $\Delta g$  en ramenant la tige à la position horizontale d'origine à l'aide d'un réglage d'une nouvelle valeur de  $y$  au moyen d'une vis micrométrique.
11. L'énergie potentielle de pesanteur est  $mgh$  où l'altitude  $h$  de la masse  $m$  est mesurée par rapport au point  $O$ ,  $h = -a \sin \theta$ . L'énergie potentielle élastique est  $\frac{1}{2}k(s - s_0)^2$  donc  $E_p = \frac{1}{2}k(s - s_0)^2 - mga \sin \theta$ .  
**rem** : l'énergie potentielle est définie à une constante près, prise nulle ici (ne change rien à l'étude car on s'intéresse à la dérivée de  $E_p$ )
12. Les coordonnées des extrémités du ressort sont  $(0, y)$  et  $(b \cos \theta, -b \sin \theta)$  donc  $s = \sqrt{b^2 + y^2 + 2yb \sin \theta}$ .
13. Il suffit de dériver :  $\Gamma = mga \cos \theta - k(s - s_0)\frac{\partial s}{\partial \theta}$  avec  $\frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{yb \cos \theta}{s}$  donc  $\Gamma = mga \cos \theta - kyb \cos \theta \left(1 - \frac{s_0}{s}\right)$   
 qu'on peut écrire  $\Gamma = \left(mga - kyb + \frac{kys_0}{\sqrt{b^2 + y^2 + 2yb \sin \theta}}\right) \cos \theta$  comme demandé.
14. Avec  $s_0 = 0$  donc  $\Gamma = (mga - kyb) \cos \theta$ , l'équilibre est réalisé si  $\Gamma = 0$  donc (sauf pour  $\theta = \pm\pi/2$ , exclu ici) lorsque  $g = k\frac{b}{ma}y$  : une mesure de  $y$  donne directement une valeur de  $g$ , proportionnelle à la valeur mesurée. Avec un ressort « classique », la valeur de  $g$  dépend de  $y$  et de la valeur de  $s$  à l'équilibre sous la forme  $g = k\frac{b}{ma}y \left[1 - \frac{s_0}{s}\right]$  donc une mesure reste en principe possible mais avec sans doute une sensibilité moindre.
15. On a maintenant pour points d'attache les coordonnées  $(y \sin \phi, y \cos \phi)$  et  $(b \cos \theta, -b \sin \theta)$  donc  $s^2 = b^2 + y^2 + 2yb(\cos \phi \sin \theta - \cos \theta \sin \phi)$  d'où enfin  $E'_p = \frac{1}{2}k[b^2 + y^2 + 2yb \sin(\theta - \phi)] - mga \sin \theta$  : tout se passe comme si on mesurait, pour la partie élastique, l'angle  $\theta$  décalé de  $\phi$ .
16. La position d'équilibre devient **stable** comme le montre l'existence d'un minimum d'énergie potentielle. De plus, on va montrer que cet angle augmente la sensibilité du dispositif puisque  $\phi$  apparaît au dénominateur de l'expression affirmée par l'énoncé à la question 21.
17. On a toujours  $\Gamma' = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = mga \cos \theta - kyb \cos(\theta - \phi)$  qu'on écrit comme demandé en développant le cosinus,  
 $\Gamma' = [mga - kyb \cos \phi] \cos \theta - kyb \sin \theta \sin \phi$ .
18. Le pivot est parfait et n'exerce donc aucun moment en projection sur l'axe de rotation ( $Oz$ ) ; le théorème du moment cinétique, projeté sur cet axe, prend donc la forme  $J\dot{\theta} = \Gamma'$  donc, pour de petits angles  $\theta$ ,  $J\ddot{\theta} = (mga - kyb \cos \phi) - kyb \sin \theta \sin \phi$  ou, en pratique,  $\phi$  étant également petit,  $J\ddot{\theta} = (mga - kyb) - kyb\phi \sin \theta$ .
19. On peut recopier cette équation sous la forme  $\ddot{\theta} + \omega_0^2(\theta - \theta_0) = 0$  avec pour pulsation propre des oscillations  $\omega_0 = \sqrt{\frac{kyb\phi}{J}}$  et pour position moyenne la position d'équilibre stable donnée par  $\theta_0 = \frac{mga - kyb}{kyb\phi}$ .
20. On a maintenant  $mg_0a = kyb$  et  $\phi = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \frac{J}{mg_0a}$  donc  $\phi = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \frac{a}{g_0} \simeq 10^{-4}\text{ rad}$  soit aussi  $20''$  (secondes d'arc) : c'est un angle très faible mais dont le réglage reste possible au moyen de dispositifs mécaniques.  
**rem** : vu la faible valeur de  $\phi$  on peut approximer  $\tan(\phi)$  à  $\phi$
21. On a maintenant pour nouvelle position d'équilibre  $\theta'_0 = \frac{mga - mg_0a}{mg_0a\phi}$  qui vérifie bien  $\theta'_0 = \frac{\Delta g}{g_0\phi}$  (même remarque que précédemment pour l'utilisation de  $\tan \phi$ ).
22. Avec  $\frac{\Delta g}{g_0} = 10^{-8}$  et  $\phi = 10^{-4}$  on trouve  $\theta'_0 \simeq 10^{-4}\text{ rad}$  ou a nouveau une vingtaine de secondes d'arc ; cette valeur reste mesurable au moyen d'un dispositif de précision.

## IV Applications de la gravimétrie

23. La démarche est analogue à la question 2 et les résultats obtenus à cette question s'adaptent sous la forme

$$\vec{g}_B = -\frac{GM_B}{r^2}\vec{e}_r \text{ où } M_B = \mu' \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ donc } \boxed{\vec{g}_B = -\frac{4G(\mu_m + \Delta\mu)\pi R^3}{3r^2}\vec{e}_r}.$$

24. La projection de  $-\vec{e}_r$  sur l'axe vertical  $\vec{e}_z$  est  $-\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \frac{h}{r}$  donc  $g_{Bz} = \frac{4G(\mu_m + \Delta\mu)\pi R^3}{3r^3}h$  qu'on écrit aussi

$$\boxed{g_{Bz} = \frac{4G(\mu_m + \Delta\mu)\pi R^3}{3(h^2 + x^2)^{3/2}}h}.$$

25. On peut considérer que le champ de pesanteur est celui créé par la Terre (de masse volumique uniforme  $\mu_m$ ) auquel on superpose le champ créé par une boule de masse  $\mu' - \mu_m$ , ce qui constitue le résultat demandé.

26. On reprend simplement le résultat de la question 24 en l'absence du terme  $\mu_m$  ; il vient  $\boxed{\Delta g = \frac{4G\Delta\mu\pi R^3 h}{3(h^2 + x^2)^{3/2}}}$ .

27. Le tracé de la fonction  $\Delta g(x)$  est celui d'une fonction paire de valeur maximale  $\Delta g_{\max} = \frac{4\pi G\Delta\mu R^3}{3h^2}$  atteinte en  $x = 0$  avec une largeur à mi-hauteur  $\Delta x = 2x_0$  telle que  $(x_0^2 + h^2)^{3/2} = 2h^3$ , ce qui donne

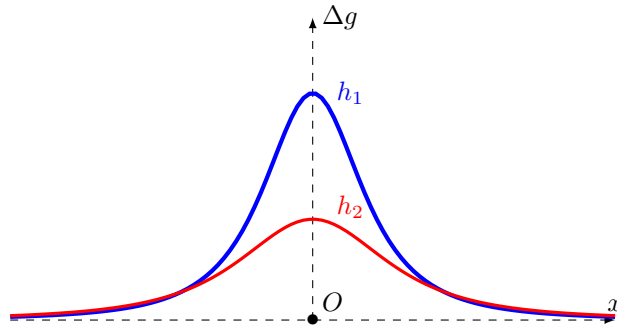
$$x_0 = h\sqrt{2^{2/3} - 1} \simeq 0.76h$$

d'où les tracés ci-dessous.

28. On a vu que  $\boxed{\Delta x \simeq 1.5h}$  tandis que  $\boxed{\Delta g_{\max} = \frac{4\pi G\Delta\mu R^3}{3h^2}}$ .

29. Sur la courbe proposée on lit la largeur à mi-hauteur  $\Delta x = 120 \text{ m}$  donc  $\boxed{h = 80 \text{ m}}$  et la valeur maximale

$$\Delta g_{\max} = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ permet de déterminer } \boxed{R = \left(\frac{3h^2 \Delta g_{\max}}{4\pi G\Delta\mu}\right)^{1/3} \simeq 40 \text{ m}}.$$



30. Il faut que l'effet cumulé de l'or et de la grotte s'annulent, donc disposer l'or au centre d'une part et faire en sorte que la masse totale de l'or soit la même que celle manquante dans la grotte.

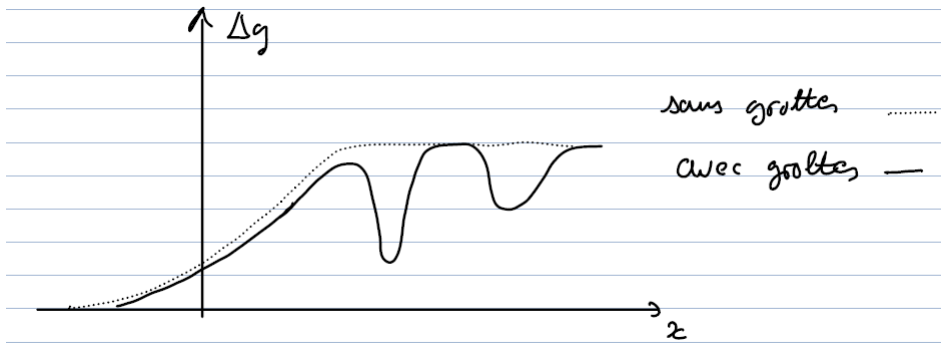
il faut donc  $R^3\mu_m = R'^3\mu_{or}$  (en utilisant les résultats de Q.26 et donc la symétrie sphérique du sujet)

31. La masse maximale d'or est donc  $m_{or} = \frac{4}{3}\pi R'^3\mu_{or} = \frac{4}{3}\pi R^3\mu_m$ , en prenant comme valeur approximative (lue sur la figure 9)  $\mu_m \simeq 2000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , une masse maximale  $\boxed{m_{or} = 8,4 \text{ t}}$  occupant au centre de la grotte une

boule de rayon  $R' = \left(\frac{3m_{or}}{4\pi\rho_{or}}\right)^{1/3} = 47 \text{ cm}$ .

**rem** : on peut aussi prendre comme valeur la masse volumique moyenne de la terre  $\mu_m = \frac{M_T}{(4/3)\pi R_T^3} \simeq 5.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , ce qui donne une masse de 23 tonnes occupant une sphère de 65cm (mais celle-ci inclut le noyau de fer de la Terre...) donc il semble plus adapté d'utiliser les valeurs approximées sur la figure 9.

32. On va supposer que le grès joue le rôle de la plaque semi-infinie  $\mu_2$  (et donc que du calcaire se trouve dessous). Il faut donc rajouter les deux anomalies dues aux sphères à celle de la figure 10. Les sphères étant vides, l'effet est l'opposé de celui de Q.29. Cela fait donc 2 creux, il faut de plus tenir compte de la différence de profondeur et donc de la hauteur de l'anomalie ainsi produite. Je les ai fait séparés pour voir l'effet mais le sont ils ou pas, on manque de valeur numérique.



## V Prospection électrique des sols

### V.A Sol homogène

33. C'est un résultat du cours,  $R = \rho \frac{L}{A}$ .
34. On veut éviter de réaliser l'électrolyse des solutions aqueuses dans le sous-sol.
35. Les lignes de courant sont  $\boxed{\text{radiales de centre } A}$ , il y a de plus invariance de révolution de la demi-sphère,  $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$ ; Le flux de  $\vec{j}$  à travers une demi-sphère dans le sous-sol est donc égal au courant total  $I$  (loi des nœuds, en régime quasi-stationnaire) donc  $\boxed{\vec{j} = \frac{I}{2\pi r^2}\vec{e}_r}$ .
36. La loi d'Ohm s'écrit ici  $\vec{E} = \rho\vec{j}$  donc  $\boxed{\vec{E} = \frac{\rho I}{2\pi r^2}\vec{e}_r}$  et le potentiel  $V_A$  s'en déduit par circulation du champ électrique,  $dV_A = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E(r)dr$  donc  $V_A = \frac{\rho I}{2\pi r} + \text{cte}$  ou enfin, compte tenu du choix de constante imposé par l'énoncé,  $\boxed{V_A(r) = \frac{\rho I}{2\pi r}}$ .
37. La superposition de deux potentiels  $V_A = \frac{\rho I}{2\pi r_A}$  et  $V_B = -\frac{\rho I}{2\pi r_B}$  convient du fait de la linéarité des équations de l'électrostatique donc  $\boxed{V = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]}$ .
38.  $V_M = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} \right]$  et  $V_N = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{1}{AN} - \frac{1}{BN} \right]$  donc  $\boxed{\Delta V = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM} \right]}$  qui permet d'écrire  $\rho = \frac{2\pi\Delta V}{If}$  en posant  $\boxed{f = \frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM}}$ .
39. Dans ce cas,  $f = \frac{1}{\ell} + \frac{1}{\ell} - \frac{1}{2\ell} - \frac{1}{2\ell}$  donc  $\boxed{f = \frac{1}{\ell}}$ .
40. Ici  $f = 1/\ell$  où  $3\ell = 10\text{ m}$  donc  $\boxed{f = 0,3\text{ m}^{-1}}$ . On s'attend donc à une différence de potentiel  $\Delta V = \frac{\rho If}{2\pi}$  soit  $\boxed{\Delta V = 2,39\text{ V}}$ ; les points  $M$  et  $N$ , situés à  $\frac{10}{6} = 1,67\text{ m}$  de part et d'autre du centre de symétrie sont, d'après la simulation, aux potentiels  $\pm 1,2\text{ V}$  donc  $\boxed{\Delta V \simeq 2,4\text{ V}}$ : la simulation est en accord avec le calcul proposé.
41. Les lignes de courant sont confondues avec les lignes de champ électrique, donc perpendiculaires aux équipotentielles, et bien sûr dirigées de  $A$  vers  $B$ :

