PSI – PSI* 24 – 25

DM N°5 - Corrigé

Centrale–Supélec
Session 2018 ***Physique–Chimie 2 MP***

I Champ gravitationnel et champ de pesanteur terrestre

I.A Champ gravitationnel créé par la Terre

1. La force électrostatique exercée dans le champ $\vec{E}$ sur une particule d'épreuve de charge q est $\vec{F} = q\vec{E}$, tout comme la force de gravitation exercée dans le champ $\vec{\mathcal{G}}$ sur une particule d'épreuve de charge m est $\vec{F} = m\vec{\mathcal{G}}$. De plus, le champ électrostatique créé en M par une charge ponctuelle q_0 en P est $\vec{E} = \dfrac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$ alors que le champ gravitationnel créé en M par une masse ponctuelle m_0 en P est $\vec{\mathcal{G}} = -Gm_0\dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$. De ce fait, le théorème de Gauss électrostatique $\oiint_{(S)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{1}{\epsilon_0}Q_{\text{int}}$ devient $\boxed{\oiint_{(S)} \vec{\mathcal{G}}\cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}}$: le flux du champ de gravitation à travers une surface (S) fermée et orientée vers l'extérieur est proportionnel à la masse M_{int} située à l'intérieur de cette surface (S). Dans cette expression, G est la constante de la gravitation universelle.

2. Les propriétés de symétrie de la Terre permettent d'abord de déterminer la direction de ce champ : au point M, tout plan contenant CM est un plan de symétrie des masses donc le champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}(M)$ est contenu dans chacun de ces plans, donc dans leur intersection $\overrightarrow{CM}$ et on peut écrire $\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(M)\vec{e}_r$. De plus, le problème physique est invariant par toute rotation autour de C donc l'intensité $\mathcal{G}(M)$ ne peut dépendre que de $r = CM$ et $\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(r)\vec{e}_r$. On peut finalement appliquer le théorème de Gauss à une sphère de centre C et de rayon r pour laquelle $\oiint_{(S)} \vec{\mathcal{G}}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2\mathcal{G}(r)$. Si $r > R_T$ cette sphère contient toute la masse M_T de la Terre donc $\boxed{\vec{\mathcal{G}}(M) = -\dfrac{GM_T}{r^2}\vec{e}_r}$ où $r = R_T + z$.

I.B Variation du champ gravitationnel avec l'altitude

3. L'intensité du champ gravitationnel est $\mathcal{G}_T(z) = \dfrac{GM_T}{R_T^2}\left(1+\dfrac{z}{R_T}\right)^{-2}$ soit, dans un développement au premier ordre, $\boxed{\mathcal{G}_T(z) \simeq \dfrac{GM_T}{R_T^2}\left(1-2\dfrac{z}{R_T}\right)}$.

4. Une variation de 1% de cette intensité correspond à $\dfrac{2z}{R_T} = 10^{-2}$ donc $\boxed{z = \dfrac{10^{-2}}{2}R_T = 31,9\,\text{km}}$.

5. On définit ce gradient par $\boxed{\vec{H} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\left\|\vec{\mathcal{G}}_T(z)\right\|\right) = -\dfrac{2GM_T}{R_T^3}\vec{e}_z}$; il est dirigé vers les zones de champ fort (vers le sol) et décrit la variation (ici, la diminution avec l'altitude) de champ de gravitation.

6. $1\,\mu\text{gal}\cdot\text{cm}^{-1} = 10^{-6}\,\text{s}^{-2}$; Comme $\|\vec{H}\| = 3,08\cdot10^{-6}\,\text{s}^{-2}$ on a $\boxed{\|\vec{H}\| = 3,08\,\mu\text{gal}\cdot\text{cm}^{-1}}$.

IV Applications de la gravimétrie

28 La démarche est analogue à la question 2 et les résultats obtenus à cette question s'adaptent sous la forme $\vec{g}_B = -\dfrac{GM_B}{r^2}\vec{e}_r$ où $M_B = \mu'\dfrac{4}{3}\pi R^3$ donc $\boxed{\vec{g}_B = -\dfrac{4G(\mu_m+\Delta\mu)\pi R^3}{3r^2}\vec{e}_r}$.

29 La projection de $-\vec{e}_r$ sur l'axe vertical $\vec{e}_z$ est $-\vec{e}_r\cdot\vec{e}_z = \dfrac{h}{r}$ donc $g_{Bz} = \dfrac{4G(\mu_m+\Delta\mu)\pi R^3}{3r^3}h$ qu'on écrit aussi $\boxed{g_{Bz} = \dfrac{4G(\mu_m+\Delta\mu)\pi R^3}{3(h^2+x^2)^{3/2}}h}$.

30 On peut considérer que le champ de pesanteur est celui créé par la Terre (de masse volumique uniforme μ_m) auquel on superpose le champ créé par une boule de masse $\mu' - \mu_m$, ce qui constitue le résultat demandé.

31 On reprend simplement le résultat de la question **24** en l'absence du terme μ_m ; il vient $\boxed{\Delta g = \dfrac{4G\Delta\mu\pi R^3 h}{3(h^2+x^2)^{3/2}}}$.

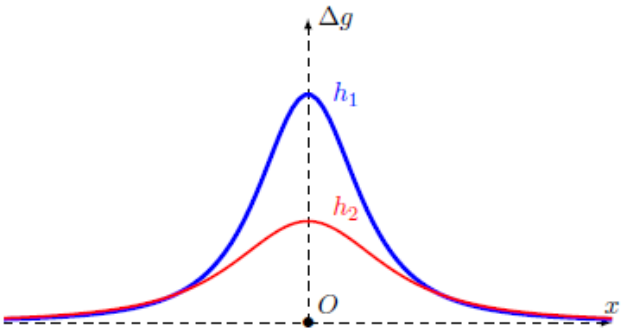
32 Le tracé de la fonction $\Delta g(x)$ est celui dune fonction paire de valeur maximale $\Delta g_{\max} = \dfrac{4\pi G\Delta\mu R^3}{3h^2}$ atteinte en $x=0$ avec une largeur à mi-hauteur $\Delta x = 2x_0$ telle que $(x_0^2+h^2)^{3/2} = 2h^3$, ce qui donne

$$x_0 = h\sqrt{2^{2/3}-1} = \simeq 0.76h$$

d'où les tracés ci-dessous.

33 On a vu que $\boxed{\Delta x \simeq 1.5h}$ tandis que $\boxed{\Delta g_{\max} = \dfrac{4\pi G\Delta\mu R^3}{3h^2}}$.

34 Sur la courbe proposée on lit la largeur à mi-hauteur $\Delta x = 120\,\text{m}$ donc $\boxed{h = 80\,\text{m}}$ et la valeur maximale $\Delta g_{\max} = 2,8\cdot 10^{-6}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ permet de déterminer $\boxed{R = \left(\dfrac{3h^2\Delta g_{\max}}{4\pi G\Delta\mu}\right)^{1/3} \simeq 40\,\text{m}}$.

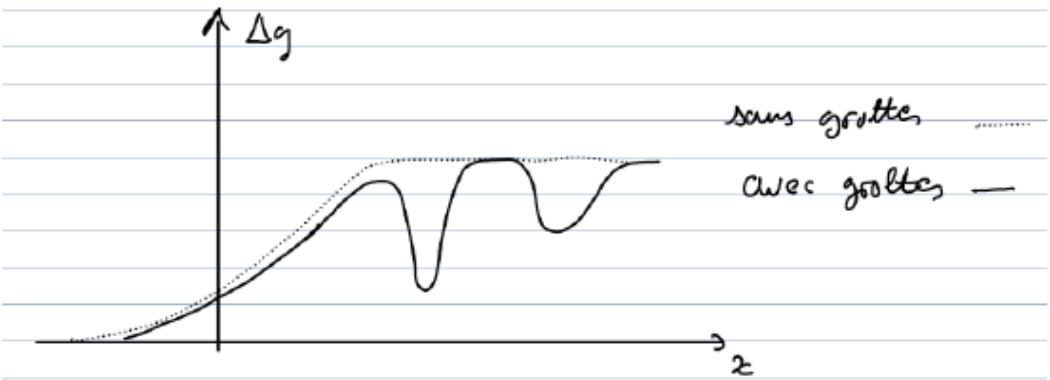


35 Il faut que l'effet cumulé de l'or et de la grotte s'annulent, donc disposer l'or au centre d'une part et faire en sorte que la masse totale de l'or soit la même que celle manquante dans la grotte.
il faut donc $R^3\mu_m = R'^3\mu_{or}$ (en utilisant les résultats de Q.26 et donc la symétrie sphérique du sujet)

36 La masse maximale d'or est donc $m_{\text{or}} = \dfrac{4}{3}\pi R'^3\mu_{or} = \dfrac{4}{3}\pi R^3\mu_m$, en prenant comme valeur approximative (lue sur la figure 9) $\mu_m \simeq 2000\ \text{kg.m}^{-3}$, une masse maximale $\boxed{m_{\text{or}} = 8,4\,\text{t}}$ occupant au centre de la grotte une boule de rayon $R' = \left(\dfrac{3m_{\text{or}}}{4\pi\rho_{\text{or}}}\right)^{1/3} = 47\,\text{cm}$.

rem : on peut aussi prendre comme valeur la masse volumique moyenne de la terre $\mu_m = \dfrac{M_T}{(4/3)\pi R_T^3} \simeq 5.5\text{kg.m}^{-3}$, ce qui donne une masse de 23 tonnes occupant une sphère de 65cm (mais celle-ci inclut le noyau de fer de la Terre....) donc il semble plus adapté d'utiliser les valeurs approximées sur la figure 9.

37 On va supposer que le grès joue le rôle de la plaque semi-infinie μ_2 (et donc que du calcaire se trouve dessous). Il faut donc rajouter les deux anomalies dues aux sphères à celle de la figure 10. Les sphères étant vides, l'effet est l'opposé de celui de Q.29. Cela fait donc 2 creux, il faut de plus tenir compte de la différence de profondeur et donc de la hauteur de l'anomalie ainsi produite. Je les ai fait séparés pour voir l'effet mais le sont ils ou pas, on manque de valeur numérique.



V Prospection électrique des sols

V.A Sol homogène

38 C'est un résultat du cours, $\boxed{R = \rho\dfrac{L}{A}}$.

39 On veut éviter de réaliser l'électrolyse des solutions aqueuses dans le sous-sol.

40 Les lignes de courant sont $\boxed{\text{radiales de centre } A}$,il y a de plus invariance de révolution de la demie-sphère,$\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$; Le flux de $\vec{j}$ à travers une demi-sphère dans le sous-sol est donc égal au courant total I (loi des nœuds, en régime quasi-stationnaire) donc $\boxed{\vec{j} = \dfrac{I}{2\pi r^2}\vec{e}_r}$.

41 La loi d'Ohm s'écrit ici $\vec{E} = \rho\vec{j}$ donc $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\rho I}{2\pi r^2}\vec{e}_r}$ et le potentiel V_A s'en déduit par circulation du champ électrique, $dV_A = -\vec{E}\cdot d\vec{r} = -E(r)dr$ donc $V_A = \dfrac{\rho I}{2\pi r} + \text{cte}$ ou enfin, compte tenu du choix de constante imposé par l'énoncé, $\boxed{V_A(r) = \dfrac{\rho I}{2\pi r}}$.

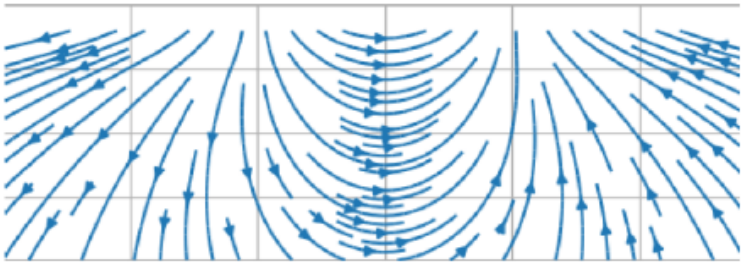
42 La superposition de deux potentiels $V_A = \dfrac{\rho I}{2\pi r_A}$ et $V_B = -\dfrac{\rho I}{2\pi r_B}$ convient du fait de la linéarité des équations de l'électrostatique donc $\boxed{V = \dfrac{\rho I}{2\pi}\left[\dfrac{1}{r_A} - \dfrac{1}{r_B}\right]}$.

43 $V_M = \dfrac{\rho I}{2\pi}\left[\dfrac{1}{AM} - \dfrac{1}{BM}\right]$ et $V_N = \dfrac{\rho I}{2\pi}\left[\dfrac{1}{AN} - \dfrac{1}{BN}\right]$ donc $\boxed{\Delta V = \dfrac{\rho I}{2\pi}\left[\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{BN} - \dfrac{1}{AN} - \dfrac{1}{BM}\right]}$ qui permet d'écrire $\rho = \dfrac{2\pi\Delta V}{If}$ en posant $\boxed{f = \dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{BN} - \dfrac{1}{AN} - \dfrac{1}{BM}}$.

44 Dans ce cas, $f = \dfrac{1}{\ell} + \dfrac{1}{\ell} - \dfrac{1}{2\ell} - \dfrac{1}{2\ell}$ donc $\boxed{f = \dfrac{1}{\ell}}$.

45 Ici $f = 1/\ell$ où $3\ell = 10\,\text{m}$ donc $\boxed{f = 0,3\,\text{m}^{-1}}$. On s'attend donc à une différence de potentiel $\Delta V = \dfrac{\rho I f}{2\pi}$ soit $\boxed{\Delta V = 2,39\,\text{V}}$; les points M et N, situés à $\dfrac{10}{6} = 1,67\,\text{m}$ de part et d'autre du centre de symétrie sont, d'après la simulation, aux potentiels $\pm 1,2\,\text{V}$ donc $\boxed{\Delta V \simeq 2,4\,\text{V}}$: la simulation est en accord avec le calcul proposé.

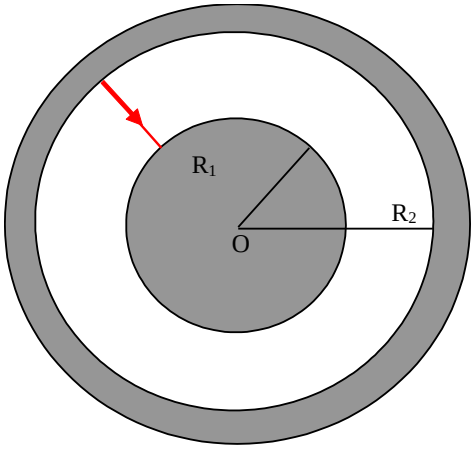
Les lignes de courant sont confondues avec les lignes de champ électrique, donc perpendiculaires aux équipotentielles, et bien sûr dirigées de A vers B :



PARTIE II : Atmosphère terrestre

1 - a) Pour calculer la capacité demandée, il faut calculer le champ entre les armatures puis le faire circuler de R_1 à R_2.

En notant Q_1 (< 0) la charge de l'armature interne (c'est à dire de la terre), le champ dans le diélectrique du condensateur (c'est à dire dans l'atmosphère) est le même que celui créé par la charge ponctuelle Q_1 placée au centre O de la terre, ce que l'on trouve par application du théorème de Gauss, comme dans le cours, en supposant que la répartition de charge est à symétrie sphérique.



$\boldsymbol{E}(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$; les lignes de champ (une d'elles est représentée en rouge) du champ électrique sont dirigées suivant - $\boldsymbol{e}_r$.

R : A l'intérieur et à l'extérieur de l'atmosphère le champ est nul (influence totale, charges surfaciques)

Ensuite, on calcule $\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q_1(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) = \int_{R_1}^{R_2} \overrightarrow{-grad(V)}.\overrightarrow{dl}$ = - $\int_{V_1}^{V_2} dV$ = $V_1 - V_2$

La capacité d'un condensateur sphérique vaut donc : $C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$.

Application numérique : C = 0,3 F.

1 - b) Le champ $\mathbf{E}_1$ au niveau du sol a pour norme : $E_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1^2}$, donc :

$$Q_1 = -4\pi\varepsilon_0 R_1^2 E_1 = -6{,}83.10^5\ C.$$

La charge de l'armature interne est liée à la différence de potentiel ($V_2 - V_1$) par : Q_1 = - C($V_2 - V_1$), cf. ci-dessus ; d'où :

$$V_2 - V_1 = -\frac{Q_1}{C} = 2{,}28\ MV.$$

2 – a) Dans un milieu contenant des porteurs de charges q_i, de concentration c_i et animés de la vitesse $\mathbf{v}_i$, la densité de courant est : $\boldsymbol{j} = \sum_i c_i q_i \boldsymbol{v}_i$ la somme étant étendue à tous les types de porteurs de charge.

Dans le cas présent, il y a deux types de porteurs (les ions positifs et les ions négatifs) et d'après les hypothèses faites :

$c_+ = c_- = c$

$q_+ = -q_- = e$

$\boldsymbol{v}_+ = +\mu_+\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{v}_- = -\mu_-\boldsymbol{E}$ (attention, ici les deux valeurs numériques de μ données dans le texte sont positives) ; donc :

$$\boldsymbol{j} = ce(\mu_+ + \mu_-)\boldsymbol{E}.$$

Si on suppose que la présence de ces ions ne modifie pas le champ qui règne dans l'atmosphère, alors le champ dans l'atmosphère est toujours :

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \quad (R_1 < r < R_2).$$

Ainsi, le vecteur densité de courant **j** est dirigé vers le centre de la terre.
L'intensité I du courant terre - air est égal au flux de **j** à travers une sphère (S) quelconque de centre O et de rayon r ; nous l'orientons vers l'extérieur pour appliquer le théorème de Gauss :

$$I = \oint_{(S)} \boldsymbol{j}.d\boldsymbol{S} = ce(\mu_+ + \mu_-)\oint_{(S)} \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{S}.$$

D'après le théorème de Gauss : $\oint_{(S)} \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{S} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$. Il en résulte l'expression du courant terre - air

$$I = ce(\mu_+ + \mu_-)\frac{Q_1}{\varepsilon_0}.$$

Attention, le vecteur surface élémentaire pour une surface fermée est sortant par convention ; I est donc négatif, orienté de la terre à la haute atmosphère (ce qui correspond bien au sens réel du champ et du vecteur densité de courant, vers la terre).

b) Ce courant $I = -\frac{dQ_1}{dt}$ décharge la terre : Q_1 est une fonction croissante du temps.

L'équation différentielle d'évolution de la charge $Q_1(t)$ de la terre est alors :

$$-\frac{dQ_1}{dt} = ce(\mu_+ + \mu_-)\frac{Q_1}{\varepsilon_0}.$$

Cette équation différentielle s'intègre en : $Q_1(t) = Q_1(0)\ e^{\frac{-t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{\varepsilon_0}{ce(\mu_+ + \mu_-)}$.

Pour que la charge de la terre soit réduite au centième de sa valeur initiale, il faut un temps

$T = \tau \ln(100) = 25$ min 42 s.