PSI - PSI* 24-25

DM N°4 pour le 26 novembre

PARTIE I : L'air atmosphérique

La densité de l'air atmosphérique décroît fortement avec l'altitude, ce qui fait que l'essentiel de la masse de l'atmosphère est concentrée dans la troposphère. Dans les questions suivantes, nous étudierons uniquement cette région qui s'étend jusqu'à une dizaine de kilomètres d'altitude. Le champ de pesanteur terrestre y est supposé uniforme : $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ où le vecteur unitaire $\vec{e}_z$ est orienté selon la verticale ascendante. L'altitude $z = 0$ correspond à la surface des mers et océans. L'étude est menée dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

Données :

1. Rayon terrestre : $R_T = 6{,}40 \times 10^3$ km
2. Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
3. Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$
4. Masse molaire du diazote : $M_{N_2} = 28{,}0\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$
5. Masse molaire du dioxygène : $M_{O_2} = 32{,}0\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$
6. Masse molaire de l'air : $M_a = 28{,}8\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$
7. Rapport des capacités thermiques massiques de l'air : $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V} = 1{,}40$
8. Enthalpie massique de vaporisation de l'eau (supposée indépendante de la température) : $\ell_{vap} = 2{,}25 \times 10^6\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$

L'air et la vapeur d'eau sont assimilés à des gaz parfaits. On note c_P la capacité thermique massique de l'air à pression constante. On donne l'expression de l'entropie massique d'un gaz parfait en variable (T,P) : $s(T,P) = c_p \ln(T) - R_a \ln(P) + cst$ avec $R_a = \dfrac{R}{M_a}$ (constante massique des gaz parfaits).

Équilibre isotherme de l'atmosphère

On s'intéresse à l'équilibre hydrostatique de l'air dans l'atmosphère terrestre. Les valeurs de référence pour la température et la pression seront prises en $z = 0$ à $P_0 = 1{,}00$ atm $= 1{,}01 \times 10^5$ Pa et $T_0 = 300$ K. On note μ la masse volumique de l'air.

1. En considérant les deux principaux constituants de l'air, calculer la valeur de M_a.
   Montrer que l'équation d'état des gaz parfaits s'écrit $P = \mu R_a T$, où P et T sont la pression et la température absolue du gaz et R_a est la constante précédemment définie. Calculer cette constante en unités SI.
2. Écrire l'équilibre d'un volume infinitésimal d'atmosphère situé entre les altitudes z et $z + dz$. En déduire que le gradient vertical de pression vaut $dP/dz = -\mu g$.
3. Le modèle le plus simple d'atmosphère (*atmosphère isotherme*) consiste à supposer que la température est constante et égale à T_0. En déduire $P(z)$. Définir une longueur caractéristique des variations de la pression et la calculer à 300 K. Donner aussi l'expression de $\mu(z)$.

Stabilité de l'atmosphère isotherme

On propose maintenant d'étudier la stabilité de l'atmosphère isotherme vis-à-vis des mouvements verticaux de l'air. On considère une parcelle d'air en équilibre mécanique et thermique à l'altitude z_0.

Cette parcelle d'air constitue un système fermé. Sa masse, son volume, sa pression, sa température et sa masse volumique sont notées respectivement m_1, V_1, P_1, T_1 et μ_1. On envisage un mouvement vertical de cette parcelle d'air qui la fait passer de l'altitude z_0 à l'altitude $z_0 + \varepsilon(t)$, avec $|\varepsilon(t)| \ll z_0$.

On fait l'hypothèse que la pression de la parcelle d'air reste égale à la pression environnante à toute altitude et que, vu la faible conductivité thermique de l'air, l'évolution considérée est adiabatique et réversible. Tous les calculs seront limités au premier ordre en $\varepsilon(t)$.

4. Rappeler, pour un gaz parfait, les capacités thermiques molaires à volume constant C_{vm} et à pression constante C_{pm}, en fonction de leur rapport γ et de R. En déduire l'expression de la capacité thermique massique de l'air c_P à pression constante en fonction de γ et R_a. Faire l'application numérique.
5. Traduire l'hypothèse d'équilibre thermique et mécanique de la parcelle d'air à l'altitude z_0, en considérant ses paramètres intensifs.
6. Exprimer la variation de pression δP_1 de la parcelle d'air lors de son déplacement vertical, en fonction de $\mu(z_0)$, g et $\varepsilon(t)$. Exprimer aussi la variation de masse volumique $\delta\mu$ de l'air environnant en fonction de $\mu(z_0)$, g, R_a, T_0 et $\varepsilon(t)$.
7. Établir la relation liant la variation de volume δV_1 de la parcelle d'air à $P(z_0)$, $V_1(z_0)$, δP_1 et γ. En déduire l'expression de δV_1 en fonction de $V_1(z_0)$, γ, R_a, T_0, g et $\varepsilon(t)$.
8. Donner l'expression de la poussée d'Archimède qui s'exerce sur la parcelle d'air à l'altitude $z_0 + \varepsilon(t)$ (au premier ordre en $\varepsilon(t)$), puis l'expression de la résultante des forces.
9. Écrire l'équation du mouvement vertical de la parcelle d'air et montrer que $\varepsilon(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :
$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + N^2\varepsilon = 0$$
où l'on exprimera N en fonction de g, c_P et T_0. Quelle est la dimension de N ? Calculer la valeur numérique de $2\pi/N$.
L'atmosphère isotherme peut-elle être considérée comme stable ? Le modèle de l'atmosphère isotherme vous semble-t-il réaliste ?

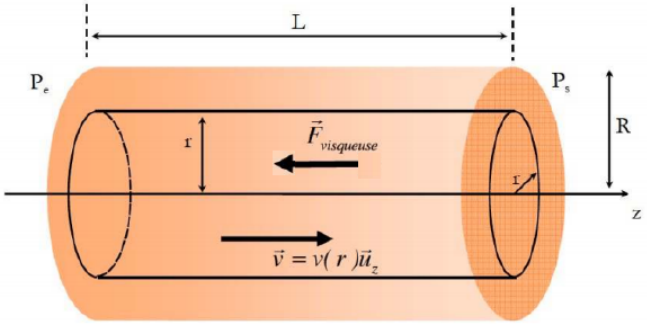
PARTIE II : Fissure dans un sous-marin

On considère un sous-marin immobile à 400 m de profondeur dans l'eau liquide, la pression de l'air à l'intérieur de ce sous-marin est $P_0 = 1$bar comme dans l'atmosphère.
On donne $\rho_0 = 1000$ kg.m^{-3} la masse volumique de l'eau supposée incompressible et $g = 9.81$ m.s^{-2} l'intensité du champ de pesanteur.

1. Rappeler l'équation locale de la statique des fluides, l'axe Oh étant pris *vers le bas* colinéaire au champ de pesanteur $\vec{g}$. h représente alors la profondeur par rapport à la surface libre.
2. Dans le cadre du modèle du fluide incompressible, donner l'expression littérale en fonction des données puis faire une application numérique.
3. On souhaite étudier si le caractère très faiblement compressible de l'eau est susceptible de modifier notablement cette valeur.
On rappelle l'expression du coefficient de compressibilité de l'eau
$$\chi_T = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dP} \simeq 5.10^{-10} Pa^{-1}$$
Montrer que la masse volumique ρ de l'eau s'écrit alors
$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \rho_0 g \chi h}$$
4. En déduire l'expression de P(h).
5. On donne $\ln(1-\epsilon) \simeq -\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2}$. Est il licite de simplifier l'expression précédente de P(h) ?
6. Montrer alors que le terme correctif apporté à l'expression trouvée à Q.2 s'écrit $\frac{1}{2}\rho_0^2 g^2 \chi h^2$
7. Évaluer alors l'écart relatif à 400m entre les deux modèles. Conclure.

Après un impact dans la coque du sous-marin, une micro fissure de forme cylindrique, d'axe Oz (horizontal), traverse transversalement la cloison du sous-marin. Cette fissure est de longueur L = 30 cm et de rayon R = $50\mu m$.
On considère que l'écoulement est visqueux, incompressible, homogène, laminaire et stationnaire dans la fissure avec un champ des vitesses en coordonnées cylindriques d'axe Oz $\overrightarrow{v} = v(r,\theta,z)\overrightarrow{e_z}$. On néglige les effets de la pesanteur dans cet écoulement car ils sont perpendiculaires à l'axe de l'écoulement.

divergence en coordonnées cylindriques :
$\text{div}\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$



8. Justifier que $\overrightarrow{v} = v(r,\theta,z)\overrightarrow{e_z} = v(r)\overrightarrow{e_z}$, donc que v ne dépend que de r.
9. La vitesse est nulle sur les parois, pourquoi ?

10. On considère la portion de fluide cylindrique, de rayon r <R et de longueur celle de la conduite L, centrée sur l'axe. On note P_e la pression à l'entrée de cette portion de fluide et P_s la pression en sortie, avec $P_e > P_s$. On note $\Delta P = P_e - P_s$. La valeur de P_e est celle déterminée à Q.2,et $P_s = P_0$
Soit système constitué de cette portion de fluide à l'instant t et de la masse dm qui y rentre entre les instants t et t + dt. A l'instant t + dt, ce système est constitué de la même portion de fluide contenu dans le cylindre de rayon r et de la masse dm qui en est sortie entre les instants t et t + dt.
Quelle propriété possède ce système ? Appliquer le théorème de la résultante dynamique et conclure.
11. Procéder à un bilan des forces, en détaillant particulièrement la force de frottement visqueux.
12. montrer que :
$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta L}r$$
13. puis montrer que
$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$
14. Déterminer le débit volumique dans la fissure et calculer le volume d'eau entrant dans le sous-marin en une journée.
15. Calculer le nombre de Reynolds de cet écoulement. Conclusion.