DM N°4 PSI - PSI* 24-25

CORRECTION

Équilibre isotherme de l'atmosphère

1. En considérant que l'air est constitué de diazote à 80% de de dioxygène à 20% :
$M_a = 0,8 M_{N2} + 0,2 M_{O2} = 28,8\ g.mol^{-1}$.
L'équation d'état des gaz parfaits s'écrit $PV = nRT = \frac{mRT}{M_a}$ d'où $\mu = \frac{m}{V} = \frac{PM_a}{RT} = \frac{P}{R_a T}$ avec $R_a = \frac{R}{M_a} = 288\ J.K^{-1}.kg^{-1}$.
2. Une tranche d'air d'épaisseur dz et de section S est en équilibre lorsque les forces de pression exercées par l'air extérieur et son poids se compensent.
Le P.F.D. appliqué sur cette tranche à l'équilibre s'écrit : $\mu \vec{g} - \overrightarrow{grad}(P) = \vec{0}$
projeté sur l'axe vertical on a : $0 = -\mu g - \frac{dP}{dz}$.
On obtient : $\frac{dP}{dz} = -\mu g$.
3. Dans le cadre de l'atmosphère isotherme : $\frac{dP}{dz} = -\frac{Pg}{R_a T_0}$.
On obtient par intégration après séparation des variables P et z : $P(z) = P_0 e^{-gz/(R_a T_0)}$.
Soit $H = \frac{R_a T_0}{g}$ la longueur caractéristique de variation de la pression. $H = 8,82\ km$.
$\mu(z) = \frac{P(z)}{R_a T_0} = \frac{P_0}{R_a T_0} e^{-gz/(R_a T_0)} = \mu_0 e^{-z/H}$

Stabilité de l'atmosphère isotherme

4. $C_{vm} = \frac{R}{\gamma - 1}$ et $C_{pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$
$c_p = \frac{C_{pm}}{M_a} = \frac{\gamma R_a}{\gamma - 1} = 1,01\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$
5. La parcelle d'air est en équilibre thermique donc $T_1 = T_0$ et en équilibre mécanique donc $P_1 = P(z_0)$.
6. $\delta P_1 = P_1(z_0 + \epsilon) - P_1(z_0) = P(z_0 + \epsilon) - P(z_0) = \left(\frac{dP}{dz}\right)_{z_0} \epsilon$ avec $P(z) = P_0 e^{-gz/(R_a T_0)}$
On obtient : $\delta P_1 = -\frac{g}{R_a T_0} P(z_0)\epsilon = -g\mu(z_0)\epsilon$.
De même : $\delta\mu = \left(\frac{d\mu}{dz}\right)_{z_0} \epsilon$ avec $\mu(z) = \mu_0 e^{-gz/(R_a T_0)}$.
On obtient : $\delta\mu = -\frac{g}{R_a T_0}\mu(z_0)\epsilon$.
7. La parcelle d'air subit une transformation adiabatique réversible. On peut donc appliquer la loi de Laplace : $PV_1^\gamma = cste$.
En différenciant cette relation, on obtient : $P_1 \gamma V_1^{\gamma-1} \delta V_1 + \delta P_1 V_1^\gamma = 0$.
Finalement : $\delta V_1 = -\frac{\delta P_1 V_1(z_0)}{P(z_0)\gamma} = \frac{g\epsilon V_1(z_0)}{R_a T_0 \gamma}$
8. A l'altitude $z_0 + \epsilon$, la poussée d'Archimède a pour expression : $\overrightarrow{\Pi_A} = \mu(z_0 + \epsilon) V_1(z_0 + \epsilon) g \vec{e_z}$ avec au premier ordre : $\mu(z_0 + \epsilon) = \mu(z_0)\left(1 - \frac{g\epsilon}{R_a T_0}\right)$ et $V_1(z_0 + \epsilon) = V_1(z_0)\left(1 + \frac{g\epsilon}{R_a T_0}\right)$.
Au premier ordre en ϵ on obtient alors l'expression approchée de la poussée d'Archimède :
$\overrightarrow{\Pi_A} = \mu(z_0) V_1(z_0)\left(1 + \frac{g\epsilon}{R_a T_0}\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\vec{e_z}$.
A l'altitude z_0 la parcelle était en équilibre sous l'action de son poids et de la poussée d'Archimède à cette altitude donc $m_1 = \mu(z_0) V_1(z_0)$.
Le poids de la parcelle a donc pour expression $\vec{P} = -\mu(z_0) V_1(z_0) g \vec{e_z}$.
La résultante des forces exercées est donc égale à $\vec{R} = \mu(z_0) V_1(z_0) \frac{g\epsilon}{R_a T_0}\frac{1-\gamma}{\gamma} g\vec{e_z} = -\mu(z_0) V_1(z_0)\frac{g\epsilon}{c_p T_0} g\vec{e_z}$.
9. La projection sur l'axe vertical du P.F.D. appliqué à la parcelle permet d'écrire :
$\mu(z_0) V_1(z_0)\ddot{\epsilon} = -\mu(z_0) V_1(z_0)\frac{g^2\epsilon}{c_p T_0}$.
On retrouve alors l'équation demandée : $\ddot{\epsilon} + N^2\epsilon = 0$ avec $N = \frac{g}{\sqrt{c_p T_0}}$.

g s'exprime en $m.s^{-2}$, c_p en $J.K^{-1}kg^{-1}$ soit en m^2s^{-2} et T_0 en K. On retrouve donc bien que N est homogène à une pulsation.
La parcelle oscille avec une période $T = \frac{2\pi}{N} = 17,8\ ms$.
Suite à une perturbation verticale, la parcelle oscille autour de sa position d'équilibre. L'atmosphère isotherme est donc stable.
Le modèle de l'atmosphère isotherme n'est cependant pas applicable dans la troposphère où la température varie plutôt linéairement avec l'altitude. Il conviendrait mieux dans la stratosphère entre 10 et 20 km d'altitude.

Fissure dans un sous-marin

1. $$\boxed{\frac{dP}{dh} = \rho g}$$

   attention au signe.

2. L'intégration de l'équation précédente conduit à

   $$P(z) = P_0 + \rho g h$$

   environ 40 bar à 400m

3. On a donc

   $$\chi = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dP}$$

   et par ailleurs

   $$\frac{dP}{dh} = \rho g$$

   d'où

   $$\frac{d\rho}{\rho^2} = g\chi dh$$

   qui s'intègre selon

   $$\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} = g\chi h$$

   ou encore

   $$\boxed{\rho = \frac{\rho_0}{1 - \rho_0 g\chi h}}$$

4. l'équation locale de la statique s'écrit alors

   $$dP = \frac{\rho_0 g}{1 - \rho_0 g\chi h}dh$$

   On intègre :

   $$\boxed{P = P_0 - \frac{1}{\chi}ln(1 - \rho_0\chi g h)}$$

5. $\rho_0\chi g h \simeq 1.910^{-3}$, l'utilisation d'un DL semble appropriée.
6. un DL à l'ordre 2 donne :

   $$P(z) = \underbrace{P_0 + \rho_0 g h}_{\text{terme principal}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho_0^2 g^2 \chi h^2}_{\text{terme correctif}}$$

7. L'écart relatif vaut donc $\frac{P_{comp} - P_{incomp}}{P_{incomp}} = \frac{\frac{1}{2}\rho_0^2 g^2 \chi h^2}{P_0 + \rho_0 g h} \simeq 0.01\%$. Le modèle compressible semble donc très bien adapté.

8. L'invariance par rotation d'angle θ du système indique v est indépendante de θ. Par ailleurs $div(\overrightarrow{v}) = 0 = \frac{\partial v}{\partial z}$ indique v est indépendante de z.
v ne dépend donc que de r.

9. La paroi est immobile et les conditions aux limites pour un fluide visqueux sont l'égalité des vitesses du fluide et de la paroi au niveau de la paroi.

10. Ce système est fermé, le régime est stationnaire, son accélération est donc nulle et donc

$$\Sigma\overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$$

rem : si le système d'étude était une particule de fluide, on conclurait de façon identique en disant que l'accélération locale est nulle de part l'hypothèse de régime permanent et que le terme convectif est nul aussi car la particule se déplace selon Oz a r constant.

11. Les forces s'exerçant sur lui sont : les forces de pression en $z = 0$:

$$\pi r^2 (P_e) \overrightarrow{u_z}$$

et $z = h$:

$$-\pi r^2 P_s \overrightarrow{u_z}$$

et la force de viscosité :

$$\eta 2\pi r L \frac{dv}{dr} \overrightarrow{u_z}$$

$\frac{dv}{dr}$ étant négative, la force de viscosité ralentit le fluide conformément au sens physique (le fluide externe est plus lent)

12. On projette selon Oz :

$$\pi r^2 (P_e - P_s) + \eta 2\pi r L \frac{dv}{dr} = 0$$

et donc :

$$\boxed{\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P r}{2\eta L} < 0}$$

13. On intègre la relation précédente $v(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L}(r^2) + C$
$v(R) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2) + C \Rightarrow C = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2)$
ce qui donne bien le résultat

14. $D_v = \iint v dS = \iint v(r) r dr d\theta = 2\pi \int_0^R v(r) r dr = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta L}$
On trouve $D_v = 3,2.10^{-8} m^3.s^{-1}$ et donc environ 2.7 l par jour.

15. On calcule la vitesse débitante $D_v = v_d S \Rightarrow v_d = \frac{D_v}{\pi R^2} = \frac{R^2 \Delta P}{8\eta L} = v_{max}/2$
Enfin

$$\boxed{R_e = \frac{\rho(2R)v_d}{\eta}} \simeq 200$$

L'écoulement est laminaire comme supposé.