

I. Gomu no jet pistol : chaîne d'oscillateurs et onde mécanique

I.1. Oscillateur harmonique

1. La position d'équilibre correspond à un minimum de l'énergie potentielle et vérifie donc l'équation :

$$V'(x_{eq}) = 0$$

$$V_0 a e^{-a(x_{eq}-x_0)} (1 - e^{-a(x_{eq}-x_0)}) = 0$$

$$\boxed{x_{eq} = x_0}$$

Il s'agit nécessairement d'un minimum car $V(x) \geq 0$ et $V(x_{eq}) = 0$.

2. Avec le changement de variable proposé :

$$V(x) = V_0 (1 - e^{-a\varepsilon})^2$$

Un développement limité au second ordre en ε donne :

$$V(x) = V_0 a^2 \varepsilon^2$$

On obtient bien une énergie potentielle de la même forme que celle associée à un ressort :

$$\boxed{V(x) = \frac{1}{2} k \varepsilon^2}$$

avec $\boxed{k = 2a^2 V_0}$.

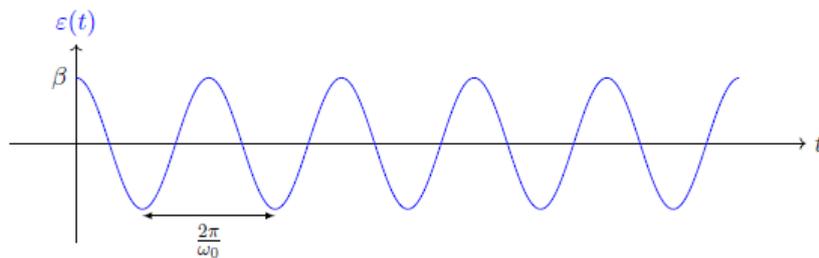
3. Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la particule de masse m dans un référentiel galiléen, donne l'équation différentielle :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m} \varepsilon = 0$$

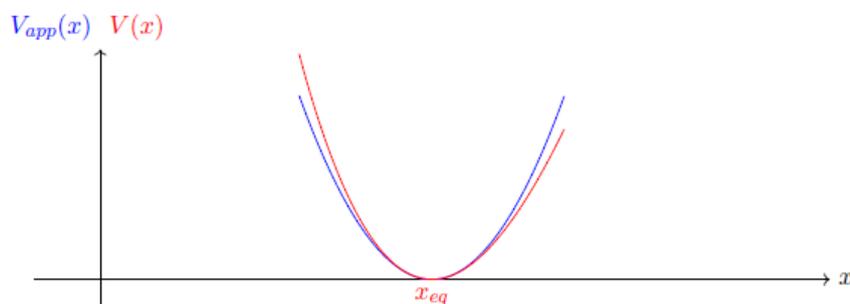
On identifie donc la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

La résolution de cette équation donne :

$$\varepsilon(t) = \beta \cos(\omega_0 t)$$



4. Dans le graphique suivant, $V(x)$ et $V_{app}(x)$ désignent respectivement le potentiel de Morse et son expression approchée.



I.2. Chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques

5. A l'équilibre, les atomes sont séparés d'une distance a et le choix de l'origine impose $x_n(0) = 0$ donc $x_n(0) = na$. On en déduit $u_n(t) = x_n(t) - na$.
6. La masse d'indice n subit deux forces de rappel de la part :
- du ressort situé à sa gauche et de longueur $l_g = x_n(t) - x_{n-1}(t)$,
 - du ressort situé à sa droite et de longueur $l_f = x_{n+1}(t) - x_n(t)$.

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la masse d'indice n dans un référentiel galiléen, donne :

$$m\ddot{x}_n(t) = -k(l_g - l_0) + k(l_d - l_0)$$

On retrouve bien la forme proposée :

$$\ddot{u}_n(t) = \frac{k}{m} [u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n]$$

avec $\alpha = 2$.

7. Il s'agit bien d'une onde harmonique puisqu'elle évolue temporellement de façon sinusoïdale. U_0 représente l'amplitude de l'onde et ω sa pulsation.
8. La fonction $\exp(ix)$ est 2π -périodique donc la longueur d'onde doit vérifier :

$$\omega t - q(na + \lambda) = \omega t - qna + 2\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{q}$$

q correspond donc à la norme du vecteur d'onde.

9. En injectant la solution proposée dans l'équation différentielle obtenue précédemment on obtient :

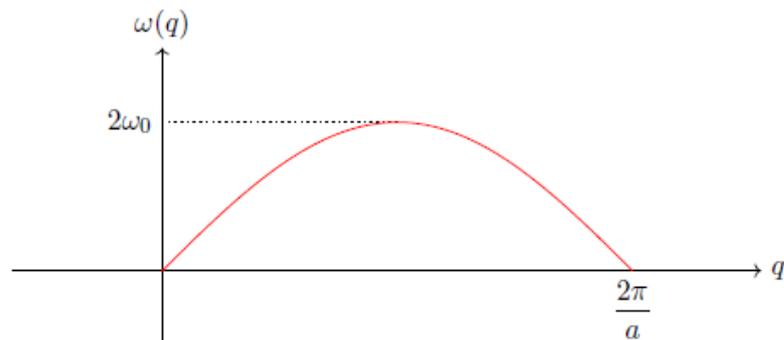
$$-\omega^2 U_0 e^{i(\omega t - qna)} = \omega_0^2 \left[U_0 e^{i(\omega t - q(n+1)a)} + U_0 e^{i(\omega t - q(n-1)a)} - 2U_0 e^{i(\omega t - qna)} \right]$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 [2 - e^{iqa} - e^{-iqa}]$$

$$\omega^2 = 2\omega_0^2 [1 - \cos(qa)]$$

Avec le formulaire de trigonométrie en fin d'énoncé, on retrouve bien l'expression demandée :

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)$$



24. Soit M un point de l'espace. Si on néglige les effets de bords, tout plan contenant le point M et le vecteur unitaire \vec{u}_z est un plan de symétrie de la distribution de charge et donc, d'après le principe de Curie, un plan de symétrie du champ électrique. Par conséquent, le champ électrique est porté par le vecteur \vec{u}_z .

De plus, la distribution de charge est invariante par translation selon les vecteurs \vec{u}_x et \vec{u}_y . La norme du champ électrique possède la même invariance.

$$\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$$

Considérons dans un premier temps, uniquement la surface au sol, de charge $-Q$.

Appliquons le théorème de Gauss en utilisant la surface fermée Σ_g délimitant un cylindre d'axe (Oz) et dont les deux bases, de surfaces S sont situées respectivement aux altitudes $z > 0$ et $-z$ (on note Σ_1 et Σ_2 ces deux bases).

$$\oiint_{P \in \Sigma_g} \vec{E}(P) \cdot \vec{n}(P) dS_p = \frac{-Q}{\epsilon_0}$$

Le flux sur la surface latérale est nulle car le champ électrique est tangent à la surface.

$$\oiint_{P \in \Sigma_g} \vec{E}(P) \cdot \vec{n}(P) dS_p = \iint_{P \in \Sigma_1} \vec{E}(P) \cdot \vec{u}_z dS_p - \iint_{P \in \Sigma_2} \vec{E}(P) \cdot \vec{u}_z dS_p = E(z)S - E(-z)S$$

De plus, lorsqu'on considère la charge du sol seule, le plan (Oxy) est un plan de symétrie de la charge et donc du champ électrique. Le champ électrique étant perpendiculaire à ce plan : $E(-z) = -E(z)$

Finalement, pour $z > 0$:

$$E(z) = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$$

On montre de la même façon que la couche d'air chargée crée, pour $z < d$, le champ électrique :

$$E(z) = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$$

D'après le principe de superposition, le champ électrique total est donc :

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \vec{e}_z}$$

25. En calculant la circulation du champ électrique de la couche d'air jusqu'au sol :

$$U_0 = \int_{air}^{sol} \vec{E} \cdot d\vec{OM} = \int_{z=d}^{z=0} -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} dz$$

$$\boxed{U_0 = \frac{d\sigma_0}{\epsilon_0}}$$

26. Applications numériques :

$$\boxed{\sigma_0 = 1,8 \times 10^{-7} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}}$$

$$\boxed{E = 2,0 \times 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}}$$

27. Cette tension n'est pas dangereuse car elle est appliquée entre deux points très éloignés. On remarque en effet que la valeur du champ électrique créé est bien inférieure (deux ordres de grandeur) à la valeur du champ disruptif de l'air, valeur à partir de laquelle un arc électrique se formerait.

28. En reprenant les résultats précédents, on a directement :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{U_0}{d} \cos(\omega t) \vec{u}_z}$$

30. Dans la région située entre les deux armatures (vide de charge et de courant), les équations de Maxwell s'écrivent :

Maxwell-Gauss :	$\operatorname{div} \vec{E} = 0$
Maxwell-Thomson :	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
Maxwell-Faraday :	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère :	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

L'équation de Maxwell-Ampère montre que si le champ électrique est variable, alors le champ magnétique ne peut pas être nul.

De plus, tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan de symétrie du champ électrique et donc un plan d'antisymétrie du champ magnétique. Le champ magnétique est donc orthoradial.

31. En calculant le flux des deux membres de l'équation de Maxwell-Ampère à travers une surface notée S délimitée par un contour fermé noté C , le théorème de Stokes-Ampère donne :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \mu_0 \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dS$$

En échangeant la dérivée et l'intégrale :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS$$

On obtient bien l'expression proposée avec :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$\Phi_{\vec{E}} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS$$

II.1. Écrantage dans un plasma thermique

32. L'énergie potentielle d'une charge e vaut :

$$E_p = eU$$

33. En supposant que la densité est proportionnelle au facteur de Boltzmann :

$$n_+ = K e^{\frac{-eU}{k_B T}}$$

A haute température ($T \gg \frac{eU}{k_B}$) un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{eU}{k_B T}$ donne :

$$n_+ = K \left(1 - \frac{eU}{k_B T} \right)$$

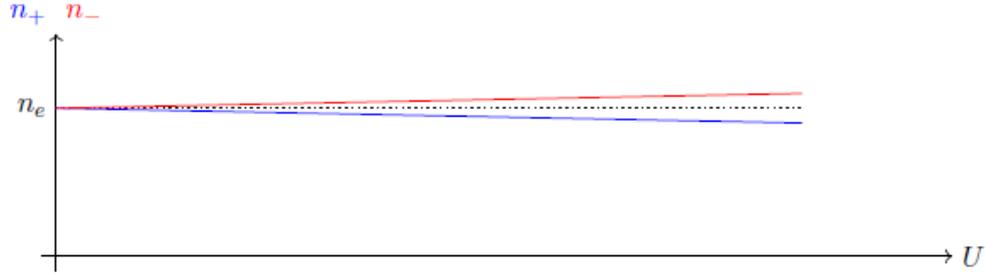
En notant $n_e = n_+(V=0)$:

$$n_+ = n_e \left(1 - \frac{eU}{k_B T} \right)$$

34. De même, en remplaçant e par $-e$ on obtient :

$$n_- = K \left(1 + \frac{eU}{k_B T} \right)$$

35. Allures graphiques :



36. En régime stationnaire, le champ électrique dérive d'un potentiel tel que $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}U$. L'équation de Maxwell-Gauss donne donc :

$$\text{div}(\vec{\text{grad}}U) = \frac{-en_- + en_+}{\epsilon_0}$$

En utilisant le formulaire et les deux questions précédentes :

$$\Delta U - \frac{2n_e e^2 U}{k_B T \epsilon_0} = 0$$

Ou encore :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 r U}{d^2 r} = \frac{2n_e e^2 U}{k_B T \epsilon_0}$$

37. Avec le changement de variable proposé, on obtient directement :

$$\frac{d^2 Z}{d^2 r} = \frac{2n_e e^2}{k_B T \epsilon_0} Z$$

Et donc :

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T \epsilon_0}{2n_e e^2}}$$

38. On obtient la solution :

$$Z(r) = A e^{-\frac{r}{\lambda_D}} + B e^{+\frac{r}{\lambda_D}}$$

On a nécessairement $B = 0$ pour que le potentiel et le champ électrique ne divergent pas à l'infini.

$$U(r) = \frac{A}{r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}}$$

En supposant que lorsque $r \ll \lambda_D$ le champ électrique créé par l'ion situé à l'origine devient prépondérant, on doit donc avoir :

$$U(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$$

On identifie ainsi $A = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}$ et on retrouve donc l'expression proposée par l'énoncé.

39. On en déduit la densité volumique de charge :

$$\rho(r) = -en_- + en_+$$

$$\rho(r) = -\frac{n_e e^3}{2\pi \epsilon_0 k_B T} \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}}$$

On en déduit, par intégration, la charge contenue dans une sphère de rayon r :

$$Q(r) = \iiint_{r' < r} \rho(r') dV = \int_{r'=0}^{r'=r} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \rho(r') r'^2 \sin(\theta) dr' d\theta d\varphi$$

$$Q(r) = -\frac{2n_e e^3}{\epsilon_0 k_B T} \int_{r'=0}^{r'=r} r' e^{-\frac{r'}{\lambda_D}} dr'$$

$$Q(r) = -e \left[1 - e^{-\frac{r}{\lambda_D}} \left(\frac{r}{\lambda_D} + 1 \right) \right]$$

II.2. Décharge du condensateur de plasma

40. γ s'exprime en $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

41. D'après la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

$$\vec{j} = -\gamma \frac{\sigma_{air}}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

42. Un bilan de charge sur la couche d'air chargée donne :

$$\frac{dq}{dt} = -\vec{j} \cdot \vec{u}_z S$$

$$\frac{d(S\sigma_{air})}{dt} = -\gamma \frac{\sigma_{air}}{\epsilon_0} S$$

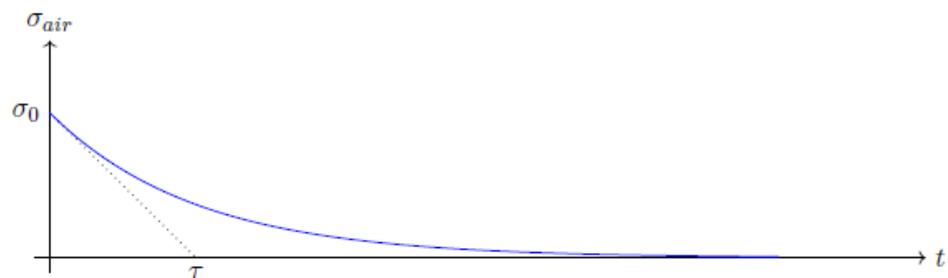
On retrouve bien la forme demandée :

$$\frac{d\sigma_{air}}{dt} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \sigma_{air} = 0$$

avec $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$.

43. La résolution donne directement :

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



44. Application numérique :

$$\tau = 8,9 \times 10^{-32} \text{ s}$$