

Physique des arbres

Dans tout le problème, *exprimer* ou *déterminer* une grandeur signifie en donner une expression littérale. En revanche *calculer* une grandeur signifie en donner une valeur numérique avec au plus deux chiffres significatifs. Les vecteurs sont surmontés d'une flèche ($\vec{g}$) dans le cas général ou d'un chapeau s'ils sont unitaires ($\|\hat{u}_z\| = 1$).

Dans tout le problème le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\hat{u}_z$ est uniforme et le référentiel terrestre galiléen. Les données numériques utiles ainsi qu'un formulaire sont rassemblés en fin d'énoncé.

I. — Physique du cavitron

En phase liquide, les molécules exercent entre elles des forces attractives (assurant entre autres la cohésion du liquide) qui permettent au liquide de supporter des forces de traction équivalentes à des pressions négatives.

La vie d'un arbre suppose une montée efficace de la sève (assimilée dans toute la suite à de l'eau) sur une hauteur qui peut atteindre quelques dizaines de mètres. Ceci conduit à l'existence de zones de pression négative, où l'état liquide de l'eau est métastable : sous l'effet d'une petite perturbation, des bulles de vapeur d'eau peuvent se former. Ceci se produit significativement lorsqu'un arbre subit un stress hydrique associant une forte évaporation (due à un fort ensoleillement) et une faible ressource en eau (due à des sols desséchés). La circulation de la sève est alors gênée par la formation de bulles de gaz au sein de l'écoulement. Pour tester quantitativement la sensibilité des espèces au stress hydrique, des chercheurs de l'INRA ont mis au point un dispositif appelé CAVITRON.

I.A. — Pressions négatives

❑ 1 — Exprimer la pression p dans un arbre assimilé à une colonne d'eau verticale emprisonnée dans un tube fermé au sommet, supposée en équilibre mécanique sous l'effet des seules forces de pression et de pesanteur, en fonction de la masse volumique ρ_e de l'eau, de la cote z mesurée à partir du sol, de l'intensité de la pesanteur g et de la pression p_0 imposée par l'atmosphère au niveau du sol via les racines. Calculer l'altitude z_m à partir de laquelle la pression devient négative. Commenter la valeur obtenue.

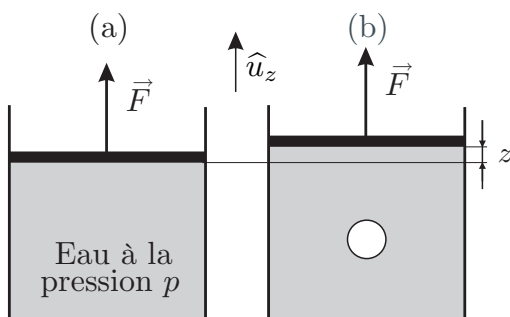


FIGURE 1 – Cylindre vertical

Pour les questions 2 à 5 on ne prendra en compte ni $\vec{g}$ ni p_0 . Sur la figure 1(a), on envisage un volume V d'eau en équilibre dans un cylindre d'axe $(O, \hat{u}_z)$ et de section S , fermé par un piston de surface S et de masse nulle sur lequel un opérateur exerce lentement une force de traction $\vec{F} = F\hat{u}_z$ avec $F > 0$ et $\hat{u}_z$ vertical ascendant.

❑ 2 — Exprimer la pression dans l'eau en fonction de F et S . Quel est son signe ?

L'opérateur veut créer au sein de l'eau liquide, une bulle de vapeur d'eau sphérique de rayon r en tirant le piston sur une hauteur z et en maintenant la force $\vec{F}$ constante 1(b). On néglige la quantité d'eau contenue dans la bulle devant V , ce qui revient à l'assimiler à une bulle de vide.

❑ 3 — On considère le système constitué d'une bulle vide de rayon r et de l'interface qui la sépare de l'eau à la pression p . Exprimer le travail infinitésimal δW_p des forces de pression quand le rayon de la bulle passe de r à $r + dr$. En déduire l'expression de la contribution des forces pressantes à l'énergie potentielle E_p du système.

On admet qu'il convient d'ajouter à cette énergie potentielle une énergie potentielle de tension superficielle de la forme $\gamma_e \Sigma$ où Σ est l'aire de l'interface entre l'eau liquide et l'eau vapeur et où la constante positive γ_e est le coefficient de tension superficielle de l'eau.

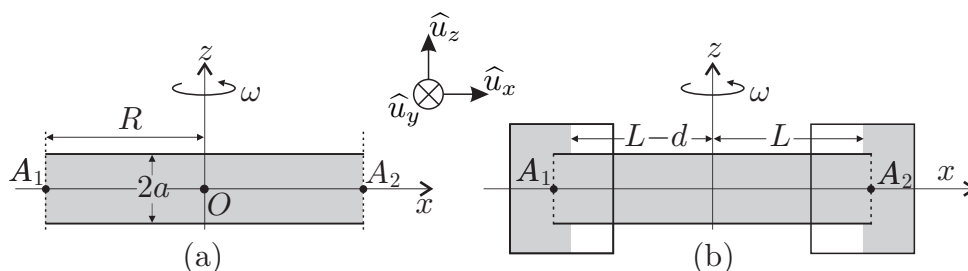
❑ 4 — Montrer que l'énergie potentielle totale du système s'exprime sous la forme d'un polynôme de degré 3 en r dont on précisera les coefficients. Montrer qu'elle admet un maximum en $r_c = -2\gamma_e/p$. On pose $x = r/r_c$ et $E_a = E_p(r_c)$. Calculer r_c et E_a pour $p = -2,0$ MPa. Tracer la courbe $\epsilon(x) = E_p(x)/E_a$ pour $x \in [0,2]$.

❑ 5 - Montrer, que dans le cadre de ce modèle, l'état liquide sans bulle est un état d'équilibre stable mais qu'une évolution vers un autre état est possible (l'état initial est dit métastable). Quelle énergie faut-il fournir pour que cette évolution soit possible? Quel est cet état final?

Cette évolution est-elle envisageable si $p = -2,0$ MPa?

I.B. — Conductance hydraulique

On envisage un écoulement d'eau, de masse volumique ρ_e et de viscosité dynamique η_e , dans un tuyau cylindrique d'axe $(O, \hat{u}_x)$ horizontal, de longueur $2R$ et de section circulaire de rayon a . Les faces d'entrée et de sortie de ce cylindre sont centrées sur les points $A_1(x = -R)$ et $A_2(x = R)$ de l'axe $(O, \hat{u}_x)$ où l'on impose respectivement des pressions p_1 et p_2 . L'ensemble est représenté sur la figure 2(a). On repère un point M dans l'eau par ses coordonnées cylindriques (r, θ, x) d'axe $(O, \hat{u}_x)$, avec $-R < x < R$, $0 < r < a$ et $0 < \theta < 2\pi$. Lorsque l'on impose une différence de pression $p_1 - p_2$ positive et constante, un écoulement d'eau incompressible et stationnaire apparaît. Cet écoulement est décrit par un champ des vitesses $\vec{v} = v(r, x) \hat{u}_x$ indépendant de θ et un champ de pression $p(x)$ indépendant de r et θ .



le poids est négligé.

FIGURE 2 – Cylindre horizontal

Dans toute la partie I.B, on considère ce cylindre sans rotation, soit $\omega = 0$.

❑ 6 — Montrer que $v(r, x)$ est indépendant de x . On le notera $v(r)$ dans la suite.

On s'intéresse au système fermé $(\mathcal{S}_r)$ constitué du fluide compris à l'instant t dans le cylindre d'axe $(O, \hat{u}_x)$ et de rayon $r < a$, entre les abscisses x et $x + dx$. Le fluide situé au delà de r exerce sur la surface latérale de $(\mathcal{S}_r)$ une force surfacique tangentielle de la forme :

$$\frac{d\vec{F}}{dS} = \epsilon \eta_e \frac{\partial v}{\partial r} \hat{u}_x \text{ où } \eta_e \text{ est la viscosité dynamique de l'eau et } \epsilon = \pm 1.$$

❑ 7 — Indiquer, en justifiant qualitativement la réponse, le choix du signe de ϵ correspondant à la situation étudiée. Exprimer la résultante des forces de viscosité sur $(\mathcal{S}_r)$. Justifier *sans calcul* que la quantité de mouvement du système $(\mathcal{S}_r)$ est indépendante du temps. En déduire la relation :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2\eta_e}{r} \frac{\partial v}{\partial r}$$

Justifier le fait que $\frac{dp}{dx}$ est une constante. En déduire l'expression de $p(x)$ en fonction de p_1 , p_2 , x et R .

On définit la conductance hydraulique $G_H = \frac{D_V}{p_1 - p_2}$ du tuyau, où D_V est le débit volumique.

❑ 8 — Dédurre des questions précédentes l'expression de $v(r)$ en fonction de r , η_e , p_1 , p_2 , a et R . Exprimer G_H en fonction de η_e , R et a .

❑ 9 — Exprimer la vitesse moyenne $\bar{v} = \frac{D_V}{\pi a^2}$ en fonction de a , p_1 , p_2 , R et η_e . Vérifier que la force de viscosité subie par la tranche d'eau située à l'instant t dans le tuyau entre les abscisses x et $x + dx$ s'écrit :

$$d\vec{F} = -8\pi\eta_e\bar{v}dx\hat{u}_x \quad (1)$$

❑ 10 — Calculer $\bar{v}$ et le nombre de REYNOLDS Re pour $a = 0,02$ mm (rayon typique des canaux dans lesquels la sève s'écoule), $p_1 - p_2 = 10^5$ Pa et $R = 0,4$ m. Que peut-on en conclure sur la nature de l'écoulement ?

I.C. — Le cavitron

Pour tester les effets du stress hydrique sur la conductance, on coupe une branche d'arbre quasi-rectiligne de longueur $2R$ que l'on met en communication avec deux récipients contenant de l'eau, non représentés sur la figure 2(a), dans des conditions telles que la pression aux extrémités $x = -R$ et $x = +R$ de la branche vaut toujours $p_1 = p(x = -R)$ et $p_2 = p(x = +R)$. On fait maintenant tourner l'ensemble autour de l'axe $(O, \hat{u}_z)$ avec une vitesse angulaire $\omega > 0$ constante et suffisamment élevée pour que la pesanteur soit négligeable dans l'écoulement. On assimile la branche à un unique canal cylindrique d'axe $(O, \hat{u}_x)$ et de rayon a dans lequel s'écoule la sève toujours assimilée à de l'eau.

❑ 11 — On étudie le mouvement de l'eau dans le référentiel $(\mathcal{R}_b)$ solidaire de la branche. Soit une particule de fluide de masse $dm = \rho_e d\tau$, d'abscisse x et de vecteur vitesse $v\hat{u}_x$ dans le référentiel $(\mathcal{R}_b)$. On admet que la rotation de la branche agit sur le mouvement de cette particule par l'intermédiaire de deux forces volumiques $\vec{f}_{i,1} = \rho_e\omega^2 x\hat{u}_x$ et $\vec{f}_{i,2} = -2\rho_e\vec{\omega} \wedge \vec{v}$. Vérifier l'homogénéité de ces formules et représenter ces forces volumiques sur une figure dans deux cas d'abscisses opposées. Citer un exemple de la vie courante dans lequel la force $\vec{f}_{i,1}$ peut être ressentie.

On adopte désormais pour l'écoulement de l'eau dans la branche d'arbre en rotation un modèle semblable à celui introduit à la question 9. On fait l'hypothèse que le champ de pression ne dépend que de x , que l'écoulement est uniforme de vitesse $\bar{v}\hat{u}_x$ et que la paroi exerce sur la tranche de fluide située entre x et $x + dx$ une force de viscosité donnée par la relation (1).

❑ 12 — Montrer que la pression dans le domaine $x > 0$ s'écrit :

$$p(x > 0) = p_2 - \frac{\rho_e\omega^2(R^2 - x^2)}{2} - \frac{8\eta_e\bar{v}(x - R)}{a^2}$$

On montre de manière analogue (travail non demandé) que :

$$p(x < 0) = p_1 - \frac{\rho_e\omega^2(R^2 - x^2)}{2} - \frac{8\eta_e\bar{v}(x + R)}{a^2}$$

❑ 13 — En déduire les expressions de $p(x = 0)$ et $\bar{v}$ en fonction de p_1 , p_2 , ρ_e , η_e , ω et R . Vérifier que la rotation est sans effet sur la conductance hydraulique G_H de la branche.

Pour imposer les pressions p_1 et p_2 , on place aux extrémités de la branche des réservoirs remplis partiellement d'eau avec des quantités légèrement différentes. Ces réservoirs sont solidaires de la branche en rotation à vitesse angulaire ω .

Lorsque l'équilibre est établi, la surface libre de l'eau dans les réservoirs devient verticale du fait des forces d'inertie. La branche, les réservoirs et la présence d'eau indiquée en gris sont représentés sur la figure 2(b).

On crée des ouvertures – non représentées sur la figure 2(b) – dans les réservoirs vers l'atmosphère, de telle sorte que l'air – qui occupe la partie des réservoirs non occupée par l'eau – impose la pression p_0 respectivement en $x_1 = -L + d$ et en $x_2 = L$ avec $L < R$ et $0 < d \ll L$. On mesure alors par une méthode optique le débit volumique en suivant l'évolution de la surface libre de l'eau dans l'un des réservoirs. Cette évolution est suffisamment lente au cours de l'expérience pour que l'on puisse supposer que les pressions p_1 et p_2 sont constantes.

□ **14** — Exprimer p_1 et p_2 en fonction de ρ_e , p_0 , ω , L , R et d en supposant que l'eau est quasiment en équilibre relatif dans les réservoirs tournants. Vérifier que $p_1 - p_2 = \rho_e \omega^2 L d$ dans l'approximation $d \ll L$.

La figure 3 représente l'allure du graphe de la perte de conductance relative

$$\delta_G = 1 - \frac{G_H(\omega)}{G_H(\omega = 0)}$$

en fonction du paramètre $\Delta p = -\rho_e \omega^2 L^2$ mesuré en mégapascals dans un CAVITRON tel que $d = 1$ cm, $L = 0,3$ m pour une branche telle que $R = 0,4$ m.

□ **15** — Calculer la valeur de ω permettant de faire baisser la conductance de 50 %, valeur choisie comme limite « objective »

du stress hydrique par les chercheurs de l'INRA. Calculer la valeur correspondante de la pression $p_1 - p_2$. Proposer une interprétation sommaire de la baisse de conductance hydraulique lorsque des bulles de gaz se forment.

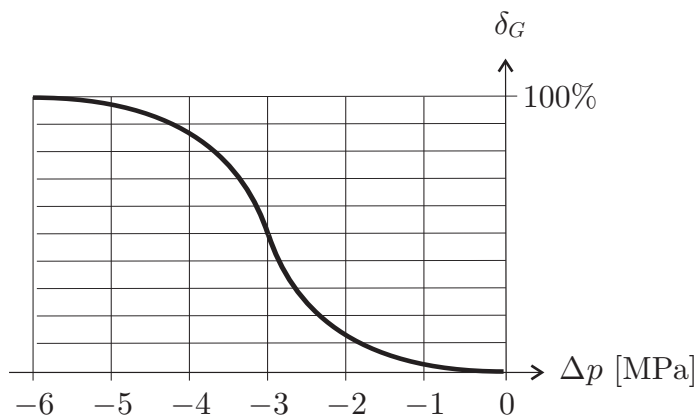


FIGURE 3 – Perte de conductance relative

FIN DE LA PARTIE I

Données numériques

- intensité de la pesanteur : $g = 1 \times 10^1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- pression atmosphérique au niveau du sol : $p_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$
- viscosité dynamique de l'eau : $\eta_e = 1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
- coefficient de tension superficielle de l'eau : $\gamma_e = 7 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
- masse volumique de l'air : $\rho_a = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- viscosité dynamique de l'air : $\eta_a = 2 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

Expression de la divergence d'un champ de vecteurs en coordonnées cylindriques
 (r, θ, x)

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_x}{\partial x}$$

DEUXIÈME PARTIE

CHIMIE DES BATTERIES

LITHIUM-ION

Aujourd'hui, la plupart des équipements électroniques nomades (ordinateurs, téléphones portables, appareils photo...) sont équipés de batteries lithium-ion, mises en lumière à l'occasion de l'attribution du Prix Nobel de chimie en octobre 2019.

Les premières batteries au lithium utilisaient ce métal sous forme solide. Le problème avec cette technologie est la formation d'excroissances de lithium, appelées dendrites, qui entraînent une dégradation de l'isolation entre l'anode et la cathode, pouvant aller jusqu'à l'apparition de courts-circuits donc de surchauffes, voire d'explosions.

Utiliser le lithium sous forme d'ions, s'intercalant au sein d'électrodes constituées d'autres matériaux, a été l'idée géniale et fondatrice de la grande famille des batteries lithium-ion au début des années 1990.

H / Équation-bilan de fonctionnement

Le numéro atomique du lithium est $Z = 3$.

H1. Où se situe-t-il dans la classification périodique des éléments chimiques ?
Combien possède-t-il d'électrons de valence?

H2. L'ion lithium le plus stable est Li^+ ; justifier.

La batterie lithium-ion fonctionne sur l'échange réversible d'ions lithium entre une électrode négative carbonée et une électrode positive constituée le plus souvent d'un oxyde de métal de transition. Dans le cas du cobalt Co, l'oxyde a pour formule CoO_2 .

Lors de la charge de la batterie, la réaction électrochimique qui se produit à l'électrode négative est la réduction des ions lithium, s'accompagnant de l'insertion d'un atome de lithium dans la structure graphite de formule C_6 .

H3. Écrire la demi-équation rédox de réduction des ions lithium, puis l'équation traduisant l'insertion de l'atome de lithium dans la structure carbonée.

H4. En déduire la demi-équation rédox qui a lieu à l'électrode négative.

Dans les deux questions qui suivent, on fait l'hypothèse que les atomes de carbone constituant cette électrode s'organisent selon une structure cubique à faces centrées (cfc).

H5. Identifier sur un schéma soigné les sites octaédriques de cette structure et calculer leur habitabilité maximale.

H6. Est-ce alors possible de former un alliage d'insertion avec le lithium ? Justifier numériquement et conclure.

À l'électrode positive, des ions lithium se désinsèrent d'un cristal d'oxyde de cobalt lithié de formule LiCoO_2 , formant ainsi le cristal d'oxyde de cobalt CoO_2 .

H7. De la même manière que pour l'électrode négative, écrire la demi-équation rédox ayant lieu à l'électrode positive.

H8. Finalement, écrire l'équation rédox traduisant le fonctionnement de la batterie.

I / Masse de la batterie

La question **H8** a permis de mettre en évidence l'échange d'un électron entre les deux couples rédox en présence.

- I1.** Déterminer la charge électrique maximale $Q_{\max}$, en Coulomb, transférée par gramme d'ions lithium.
- I2.** En vous aidant des données, déterminer la masse d'ions lithium dans une batterie de téléphone portable.
- I3.** Quel problème écologique cela peut-il soulever ?
- I4.** Déterminer, en W.h, l'énergie de la batterie d'un téléphone portable à 25°C.
- I5.** En déduire la masse de la batterie. Ce résultat vous semble-t-il plausible ?