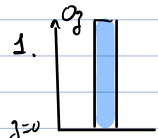


La physique des arbres

I. la cavitation

A. pressions négatives

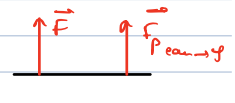
1.  eq. locale de la statique des fluides $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ car $\vec{g} \cdot \vec{e}_z < 0$

$$\int, p = \text{cte} \quad \text{et} \quad p(z) = p_0 - \rho g z$$

$$p(z_m) = 0 \Rightarrow z_m = \frac{p_0}{\rho g} = 10 \text{ m.} \quad \text{si } z > z_m \quad p < 0 \quad \text{car } p(z) < 0$$

Cette valeur en tout à fait possible pour un arbre et le phénomène de métastabilité peut être réalisé

2. Le piston est quasiment à l'équilibre mécanique: $\sum \vec{F} = \vec{0}$ ($\mathcal{V} = \{\text{piston}\}$)



$$\vec{F} + \vec{F}_{p, \text{eau} \rightarrow \mathcal{V}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} + p \vec{S} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \vec{S} = S \vec{e}_z \quad p = -F/S < 0$$

Donc cette situation l'eau est en équilibre métastable et une bulle de vapeur peut exister

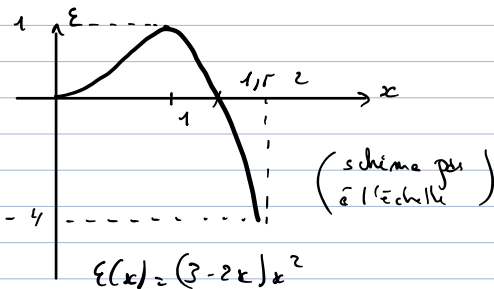
3. $\mathcal{V} = \{\text{air, de même cc que l'eau}\}$ $\delta W = -p \delta V = -p 4\pi r^2 \delta r = -dE_{p,p}$

$$E_{p,p} = p \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{par ailleurs:} \quad E_{p,ts} = \gamma_e 4\pi r^2$$

4. $E_p = E_{p,p} + E_{p,ts} = 4\pi r^2 \left(\gamma_e + p \frac{r}{3} \right)$; $r_c / \frac{dE_p}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{2}{r_c} \left(\gamma_e + p \frac{r_c}{3} \right) + r_c \left(\frac{p}{3} \right) = 0$

$$r_c = -2\gamma_e / p$$

$$d_e + : \left. \frac{d^2 E_p}{dr^2} \right|_{r=r_c} = 2\gamma_e + \frac{6r_c}{3} p = 2\gamma_e + 2r_c p = -2\gamma_e < 0 \quad \text{car bien un maximum.}$$



$$NV: r_c = 7 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

$$E_a = 1,4 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

5. eau sans bulle: $x=0$ E_p est 1 minimum $\Rightarrow$ état d'équilibre stable

Si on fournit E_a comme énergie à la bulle, celle-ci va croître son rayon jusqu'à ∞

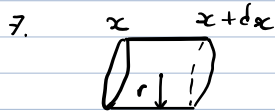
l'eau se vaporise totalement dans ces conditions.

($r < 0$ donc $< p_{\text{vap. saturante}}$, état stable: vapeur)

I.8 Conductance hydraulique

6. rem: l'indépendance vis à vis de θ provient de l'invariance par rotation autour de Oz du cylindre

l'écoulement est incompressible: $\text{div}(\vec{v}) = 0 = \frac{\partial v_x}{\partial x} \Rightarrow \vec{v}$ indep. de x $\vec{v} = v_x(r) \vec{e}_x = v(r) \vec{e}_x$



$$\frac{dF}{ds} = \vec{\sigma} = + \gamma_e \frac{dv}{dr} \vec{e}_x \quad \text{En effet } v(a) = 0, \text{ donc } \frac{dv}{dr} < 0$$

contrainte tangentielle

et la couche du dessus calcule celle dessous

On a: $\vec{v} = v(r) \vec{e}_x$, les trajectoires ($\equiv$ aux lignes de courant en RS) st donc horizontales,

donc $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$. $\vec{v}$ rotate donc at au cours du tps. $\vec{a}$ est fame, sa q^r de mat est est. (mat de transit rect. uniforme)

rem: $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \vec{0} + v(r) \frac{\partial v(r)}{\partial x} \vec{e}_x = \vec{0}$ donne le m^e résultat (pour toute p^t dans $\mathcal{V}$)

On a donc: $\sum \vec{f} = \vec{0} = p(x) \pi r^2 \vec{e}_x - p(x+dx) \pi r^2 \vec{e}_x + \gamma_e \frac{dv}{dr} x 2\pi r dx \vec{e}_x = 0$ on <= >

sur Ox:

$$\frac{dp}{dx} = \underbrace{2\gamma_e}_{f(x)} \underbrace{\frac{dv}{dr}}_{f(r)}$$

x et r st indépendantes

rem: $\frac{dv}{dr} < 0$

$$\frac{dp}{dx} = K < 0$$

$$p(x) = Kx + H$$

rem: l'hypothèse que p est indépendante de r se démontre par 1 approche locale

en prenant comme système d'étude 1 particule de fluide de volume massique $dZ = r dr d\theta dx$

les CAL relatives Σp st: $p(-R) = p_1, p(R) = p_2 \Rightarrow p(x) = \frac{p_2 - p_1}{2R} x + \frac{p_2 + p_1}{2}$

8. On déduit de Q7 que $2\gamma_e \frac{dv}{dr} = \frac{p_2 - p_1}{2R} \Rightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{-\Delta p}{4\gamma_e R} r \Rightarrow v(r) = -\frac{\Delta p}{8\gamma_e R} r^2 + A$

$v(a) = 0 \Rightarrow A = \frac{\Delta p a^2}{8\gamma_e R} \Rightarrow v(r) = \frac{\Delta p a^2}{8\gamma_e R} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$ ($\Delta p = p_1 - p_2$)

par définition: $Dv = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{r=0}^a 2\pi r v(r) dr = \frac{\Delta p a^2 \pi}{4\gamma_e R} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4a^2} \right]_0^a = \frac{\Delta p a^2}{16\gamma_e R} \times \frac{S}{\pi a^2}$

donc $G_H = \frac{\pi a^4}{16\gamma_e R}$

(vitesse débitante $\rightarrow V_d = \frac{V_0}{2}$)

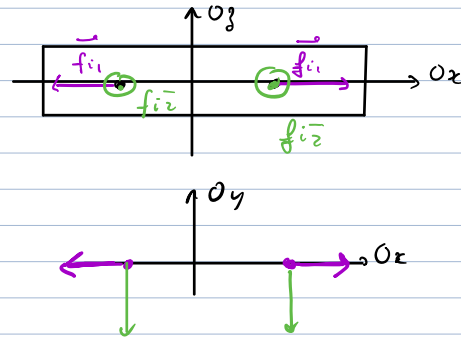
9. On a calculé $v_d = \frac{a^2 \Delta p}{16 \eta_e R}$. Or : $d\vec{F} = + \eta_e 2\pi a dx \frac{dv}{dr} \Big|_{r=a} \vec{e}_x$
 $= - \eta_e 2\pi a dx \frac{\Delta p}{\eta_e R} \vec{e}_x = - \frac{\pi \Delta p a^2 dx}{2R} \vec{e}_x$
 $= - 8\pi \eta_e v_d dx \vec{e}_x$

10. AN: $\vec{v} = v_d = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ et $Re = \frac{a v_d \rho}{\eta} = 0.13 \Rightarrow$ écoulement laminaire

11. $[\rho_e \omega^2 x] = M L T^{-2} \times L^{-2}$ ce st bien des forces volumiques
 $[\rho_e \omega r] = M L T^{-2} \times L^{-3}$

$\vec{f}_i$ est lié à la force d'inertie dite "d'entraînement", aussi centrifuge lors d'un mouvement de rotation (manège, virage...)

rem: $\vec{f}_i$ est la force (vol) de Coriolis



12. Dans le référentiel R_1 , le mouvement de la tranche de fluide est une translation rect. uniforme.

De même qu'à φ , le q^e de mouvement de φ reste est.

On a donc: $\sum_{Ox} \vec{f} = 0 \Rightarrow p(x) \pi a^2 - p(x+dx) \pi a^2 - 8\pi \eta_e \bar{v} dx + \rho_e \omega^2 x \pi a^2 dx = 0$
 $\frac{dp}{dx} = \rho_e \omega^2 x - \frac{8\eta_e \bar{v}}{a^2} \rightarrow p(x) = \rho_e \omega^2 \frac{x^2}{2} - \frac{8\eta_e \bar{v}}{a^2} x + \text{const}$

avec $p(x=R) = p_2 \Rightarrow p(x) = p_2 + \rho_e \omega^2 \frac{(x^2 - R^2)}{2} - \frac{8\eta_e \bar{v}}{a^2} (x - R)$ cqfd

13. D'après Q_{12} $p(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} p(x) = p_2 - \rho_e \omega^2 \frac{R^2}{2} + \frac{8\eta_e \bar{v} R}{a^2}$

$p(0^-) = p_1 - \rho_e \omega^2 \frac{R^2}{2} - \frac{8\eta_e \bar{v} R}{a^2}$

$p(x)$ est 1 fct $\Rightarrow p(0^+) - p(0^-) = 0 = p_2 - p_1 + \frac{16\eta_e \bar{v} R}{a^2} \Rightarrow \bar{v} = \frac{(p_1 - p_2) \frac{a^2}{16\eta_e R}}$

(module du fluide $\Rightarrow$)

et $p(0) = \frac{p_1 + p_2}{2} - \rho_e \omega^2 \frac{R^2}{2}$

rem: je ne vois pas l'intérêt de calculer $p(0)$ de la suite...
 $\bar{v}$ suffit pour G_H

$G_H = \frac{Dv}{\Delta p} = \frac{\pi a^2 \bar{v}}{4p} = \frac{\pi a^4}{16\eta_e R}$ inchangée ✓

14. On a, selon les hypothèses écrites : $p(x_1=L) = p_0 = p_2 - \rho_e \omega^2 \left(\frac{R^2 - L^2}{2} \right) + 0$ pour le terme de viscosité

- $\equiv$ de p aux surfaces libres
- équilibre donc $\bar{u} = 0$

équilibrée

$$p(x_1 = -L+d) = p_0 = p_1 - \rho_e \omega^2 \left(\frac{R^2 - (L-d)^2}{2} \right) - \frac{8\eta_e \bar{u}}{a^2} (-L+d)$$

eq. de Qiez simplifiée

$$\begin{cases} p_0 = p_2 - \rho_e \omega^2 \left(\frac{R^2 - L^2}{2} \right) \\ p_0 = p_1 - \rho_e \omega^2 \left(\frac{R^2 - (L-d)^2}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_2 = p_0 + \rho_e \omega^2 \left(\frac{R^2 - L^2}{2} \right) \\ p_1 = p_0 + \rho_e \omega^2 \left(\frac{R^2 - (L-d)^2}{2} \right) \end{cases}$$

$$p_1 - p_2 = \rho_e \omega^2 Ld \quad \text{si } d \ll L \quad (d^2 \ll L^2 \text{ et } dL)$$

15. On voit $\Delta p = -3 \text{ MPa}$ pour $\delta = 50\% \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{-\Delta p}{\rho_e L^2}} = 180 \text{ rad.s}^{-1}$ et $p_1 - p_2 = \rho_e \omega^2 Ld$

$$= -\Delta p \frac{d}{L} = 0.1 \text{ MPa}$$

Si des bulles se forment, Du > donc GH >

Ce dispositif permet donc de simuler le stress hydrodynamique et de tester quantitativement

la sensibilité des espèces à ce stress (cf deuxième phrase de l'intro du I)

Problème 2 : Chimie des batteries lithium-ion

Partie H / Équation-bilan de fonctionnement

H1. Li se situe à la 2^{ème} ligne, à la 1^{ère} colonne. Il possède donc un électron de valence.



H2. Suite à la perte d'un électron, l'ion Li^+ a une configuration électronique $1s^2$ (sous-couche saturée) soit celle d'un gaz noble, d'où sa **stabilité**.

H3. La réduction des ions Li^+ se traduit par la demi-équation $\boxed{\text{Li}_{(\text{aq})}^+ + \text{e}^- = \text{Li}_{(\text{s})}}$.

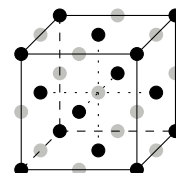
L'insertion de Li dans le graphite s'écrit $\boxed{\text{Li}_{(\text{s})} + \text{C}_{6(\text{s})} = \text{LiC}_{6(\text{s})}}$.

H4. En sommant les équations précédentes, $\boxed{\text{Li}_{(\text{aq})}^+ + \text{C}_{6(\text{s})} + \text{e}^- = \text{LiC}_{6(\text{s})}}$.

H5. Les sites octaédriques (disques gris) sont situés au centre de chaque arête, et au centre de la maille. La relation de contact entre atomes C selon les diagonales des faces s'écrit $a\sqrt{2} = 4R_{\text{C}}$. Les sites O peuvent contenir un atome Li de rayon maximal r_{max} tel qu'il y ait contact C-Li-C sur une arête :

$$R_{\text{C}} + 2r_{\text{max}} + R_{\text{C}} = a$$

En injectant la relation précédente,

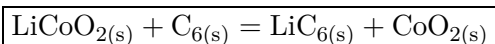


$$\boxed{r_{\text{max}} = \frac{a}{2} - R_{\text{C}} = (\sqrt{2} - 1)R_{\text{C}} = 29 \text{ pm}}$$

H6. On remarque que $R_{\text{Li}} > r_{\text{max}}$: **c'est impossible de faire un alliage d'insertion**. En réalité, le **graphite n'adopte pas une maille cfc**, mais une structure bidimensionnelle « en feuillets ».

H7. La désinsertion des ions Li^+ se traduit par $\boxed{\text{LiCoO}_{2(\text{s})} = \text{Li}_{(\text{aq})}^+ + \text{CoO}_{2(\text{s})} + \text{e}^-}$.

H8. On somme les demi-équations aux deux électrodes, en simplifiant les électrons et les ions Li^+ :



Partie I / Masse de la batterie

I1. Les demi-équations précédentes montrent que pour un ion Li^+ formé à une électrode puis consommé à l'autre, il y a un électron mis en jeu. 1 mole d'ions Li^+ correspondent donc à $\mathcal{N}_{\text{a}}$ électrons, de charge $e\mathcal{N}_{\text{a}} = \mathcal{F}$ en valeur absolue. La quantité de matière n dans une masse m d'ions Li^+ vaut $n = m/M_{\text{Li}}$. On en déduit la charge pour 1 gramme d'ions Li^+ :

$$\boxed{Q_{\text{max}} = \frac{m\mathcal{F}}{M_{\text{Li}}} = 1,390 \cdot 10^4 \text{ C}}$$

I2. La capacité de la batterie vaut

$$\text{Cap} = 2\,675 \text{ mA.h} = 2\,675 \times \frac{3\,600}{1\,000} \text{ A.s} = 9,630 \cdot 10^3 \text{ C}$$

On en déduit la masse d'ions Li^+ dans la batterie :

$$\boxed{m = \frac{\text{Cap}}{Q_{\text{max}}} = 0,692\,8 \text{ g}}$$

- I3.** Le lithium est **très rare, peu recyclable** et **les ressources sont limitées**. Il est extrait de minéraux dans des **mines très polluantes** dans des pays en voie de développement, avec défrichage massif des forêts qui gênent l'excavation...
- I4.** La puissance fournie par la batterie s'exprime $P = Ei$ avec $i = \delta q / dt$. On obtient l'énergie $\mathcal{E}$ en intégrant P sur la durée de fonctionnement :

$$\mathcal{E} = \int_0^{Cap} E \delta q = E Cap = 9,6 \text{ W.h}$$

- I5.** La masse de la batterie s'obtient en divisant l'énergie $\mathcal{E}$ par l'énergie massique fournie :

$$m_b = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{\text{massique}}} = 48 \text{ g} : \text{le résultat obtenu est crédible.}$$