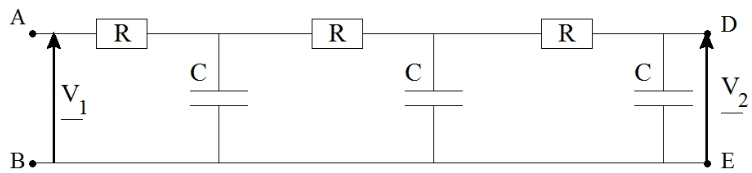
Problème I : Étude d'oscillations à travers un réseau déphaseur

I On considère le réseau déphaseur, noté (D), alimenté en régime sinusoïdal à la pulsation ω, et représenté ci-dessous :



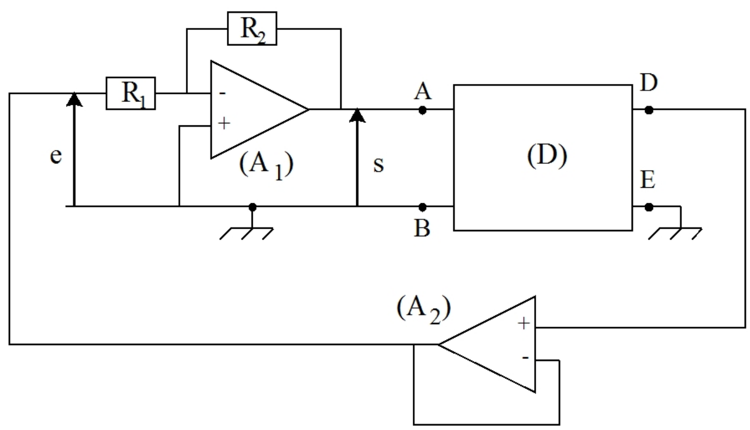
Dire qualitativement quel est le type de ce filtre en considérant les limites $\omega \to 0$ et $\omega \to +\infty$.

II Montrer que la fonction de transfert de ce filtre se met sous la forme (on note $x = RC\omega$) :

$$\underline{\mathcal{H}} = \frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = \frac{1}{1 + 6jx - 5x^2 - jx^3}$$

Donner les comportements asymptotiques de $\underline{\mathcal{H}}$ à basse et haute fréquence, et vérifier la cohérence avec le comportement qualitatif prévu à la question précédente.

III On associe à ce réseau (D) 2 amplificateurs linéaires intégrés (ALI) idéaux notés (A_1) et (A_2) selon le schéma ci-dessous. Ils fonctionnent tous deux en régime linéaire : on a alors un courant nul à chaque entrée ($i_+ = i_- = 0$) et les potentiels d'entrée sont égaux ($V_+ = V_-$).



On s'intéresse à l'apparition d'oscillations de pulsation ω_0 dans le système.

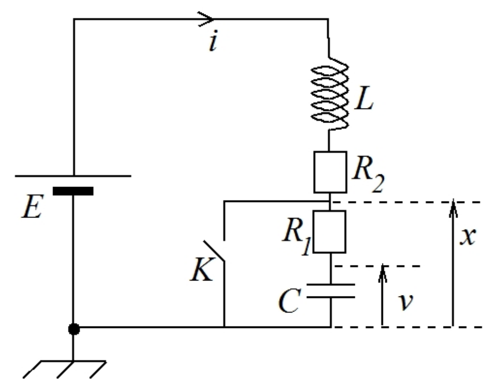
3.1. Calculer la fonction de transfert de (A_1) $\underline{\mathcal{I}} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$.

3.2. Justifier le rôle de l'amplificateur (A_2).

3.3. Établir la relation entre $\underline{\mathcal{H}}$ et $\underline{\mathcal{I}}$. En déduire la pulsation des oscillations ω_0, ainsi que la relation vérifiée par R_1 et R_2.

Problème II : Circuit oscillant

Le circuit représenté ci-contre est maintenu, l'interrupteur K étant fermé, dans cette configuration durant un temps suffisamment long pour qu'on puisse considérer qu'il est en régime permanent. L'interrupteur K est alors ouvert, cet instant d'ouverture étant considéré comme l'instant $t = 0$.



1. En justifiant vos réponses, reproduire et compléter le tableau ci-contre qui décrit comment se fait la transition à $t = 0$ pour différentes grandeurs mises en jeu dans le circuit. $t \to 0^-$ signifie que t tend vers zéro par valeurs négatives, et $t \to 0^+$ par valeurs positives.

grandeur	$t \to 0^-$	$t \to 0^+$
$i(t)$		
$v(t)$		
$x(t)$		

2. Écrire pour toute valeur de t postérieure à l'ouverture de K l'équation différentielle en $i(t)$, puis donner celle en $v(t)$.

3. On notera que la résistance R_1 en série avec le condensateur C est précisément égale à la résistance interne R_2 de la bobine d'inductance L. Cette condition restera valable jusqu'à la fin du problème.

3.1. Si R_1 avait une valeur nulle, montrer que l'équation différentielle en $v(t)$ admettrait des solutions sinusoïdales de pulsation ω_0 que l'on exprimera en fonction de L et C.

3.2. En outre, montrer en écrivant l'équation caractéristique qu'il est une valeur particulière de R_1, à L et C données, conférant à cette équation une racine double.

3.3. Soit R_c cette valeur de R_1 : réorganiser l'écriture de l'équation différentielle afin d'exprimer les coefficients des dérivées de $v(t)$ en fonction exclusivement de ω_0 et du rapport $m = R_1/R_c$.

4. On se propose d'écrire l'équation différentielle du circuit en prenant une variable réduite définie par $\tau = \omega_0 t$. Les dérivées mises en jeu dans l'équation différentielle devront dorénavant être des dérivées successives de v par rapport à τ. Déterminer ainsi la nouvelle équation différentielle régissant l'évolution de la tension v.

5. On définit les valeurs numériques suivantes : $m = 0,5$ et $\omega_0 = 1\ rad/s$.

5.1. Écrire l'équation différentielle en v.

5.2. Résoudre l'équation caractéristique, et montrer que la solution peut se mettre sous la forme suivante : $v(t) = Q + Ae^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi)$. Achever la résolution en prenant en compte les conditions initiales, et les valeurs de m et ω_0 choisies.

5.3. Vérifier qu'une détermination possible de l'angle φ est $\pi/3\ rad$.

6. Effectuer le tracé de la solution $v(t)$.