

DM 4 : Corrigé de l'épreuve de Centrale MP 2020

Psi/Psi* Champollion

I L'Uranium, source d'énergie

I.A L'uranium naturel

I.A.1 Evolution de la population d'Uranium au cours du temps

La radioactivité est au programme de MP.

1. λ est l'inverse d'un temps.
2. $N(t+dt) = N(t) - N(t)\lambda dt$ (le dernier terme correspondant aux noyaux s'étant désintégrés pendant dt). On a donc $N(t+dt) - N(t) = -\lambda dt N(t)$, d'où l'équation demandée.
3. On résout : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, d'où $N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$, et donc $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

4. $\lambda_{238} = 4,91 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$; $\lambda_{235} = 3,12 \cdot 10^{-17} \text{ s}^{-1}$.

On est sur un ordre de grandeur similaire au Thorium, ce qui n'est guère surprenant car ce dernier a des propriétés radioactives similaires.

5. Elle diminue : la quantité d'Uranium 235 diminue plus rapidement que celle d'Uranium 238.
6. Si on note x_0 la proportion d'Uranium 235 présente à $t = 0$ (instant présent), la quantité des deux isotopes d'Uranium s'écrit :

$$N_{235} = x_0 N_0 e^{-\lambda_{235} t} \text{ et } N_{238} = (1 - x_0) N_0 e^{-\lambda_{238} t}.$$

La proportion $x(t)$ d'Uranium 235 s'écrit donc :

$$x(t) = \frac{N_{235}}{N_{235} + N_{238}} = \frac{1}{1 + N_{238}/N_{235}}, \text{ soit :}$$

$$x(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-x_0}{x_0} \exp((\lambda_{235} - \lambda_{238})t)}$$

On peut donc en extraire le temps (négatif) où $x(t) = 0,03$:

$$\frac{1-x(t)}{x(t)} = \frac{1-x_0}{x_0} \exp((\lambda_{235} - \lambda_{238})t), \text{ et donc :}$$

$$t = \frac{1}{\lambda_{235} - \lambda_{238}} \ln \frac{(1-x(t))x_0}{(1-x_0)x(t)} = -1,963 \cdot 10^9 \text{ ans}$$

L'âge de la Terre étant de l'ordre de 4,5 milliards d'années, on a donc une durée de 2,5 milliards d'années pendant laquelle l'Uranium était assez riche pour faire fonctionner un réacteur nucléaire.

I.A.2 Radioactivité naturelle au XXI^e siècle

7. Commençons par déterminer la puissance P dégagée par la radioactivité d'une masse m d'Uranium naturel.

On dispose pour cela des énergies E_{235} et E_{238} libérées par la désintégration de l'Uranium, des masses molaires, et des fractions molaires x_{235} et x_{238} .

On note $M = x_{235}M_{235} + x_{238}M_{238}$ (on néglige l'isotope 234...) la masse molaire globale de l'Uranium.

Les quantités n_i de chaque isotope valent donc :

$$n_i = x_i \frac{m}{M}.$$

Le nombre de désintégrations de chaque isotope par unité de temps vaut :

$$D_i = \lambda_i \mathcal{N}_A n_i,$$

et la puissance dégagée par chaque isotope vaut :

$$P_i = E_i D_i.$$

En additionnant les puissances dues à chaque isotope, on obtient :

$$P = \frac{m \mathcal{N}_A}{x_{235} M_{235} + x_{238} M_{238}} (x_{235} \lambda_{235} E_{235} + x_{238} \lambda_{238} E_{238})$$

Soit $P = 0,212$ mW pour $m = 24$ kg et $P = 8,8$ mW pour $m = 1$ t.

La valeur obtenue est nettement plus faible que celle donnée par le texte. L'écart est due au fait que la valeur donnée par le texte prend en compte l'intégralité de la chaîne de désintégration, qui comprend de nombreuses étapes dont certaines sont les principales contributrices à la puissance dégagée par radioactivité

I.B Le combustible nucléaire

I.B.1 Cristal de dioxyde d'Uranium

8. Les Uranium sont en gris clair (ils correspondent bien à un réseau CFC) et les Oxygène en gris foncé (ils correspondent à un réseau cubique). Les Oxygène occupent les sites tétraédriques du réseau CFC (on peut d'ailleurs noter un des tétraèdres dessiné sur la figure...)
9. On a 4 atomes d'Uranium et 8 atomes d'Oxygène par maille, ce qui est bien cohérent avec la formule.
10. La masse volumique s'exprime $\rho = \frac{8M_O + 4M_U}{\mathcal{N}_A a^3}$, la masse molaire de l'Uranium valant toujours $M_U = x_{235} M_{235} + x_{238} M_{238}$. On a donc :

$$a = \left(\frac{8M_O + 4M_U}{\mathcal{N}_A \rho} \right)^{1/3} = 546 \text{ pm}$$

La valeur trouvée est bien en accord avec la structure proposée : $d = \frac{\sqrt{3}}{4} a = 237$ pm (il s'agit d'un quart de la grande diagonale du cube), ce qui correspond à la somme des rayons ioniques.

I.B.2 Combustible utilisé dans les centrales

11. On peut calculer explicitement l'énergie libérée par la désintégration de l'Uranium 235 *seul* :
 $E = E_{235} \mathcal{N}_A \frac{m'}{M}$
avec $m' = m \times 0,05$ (car 5% d'uranium)
et $M = M(\text{UO}_2) = 2M(\text{O}) + M(\text{U})$
AN : $E = 6.3 \times 10^8 \text{ J}$
12. La centrale à charbon comme la centrale nucléaire sont des centrales thermiques, pour lesquelles le rendement est de l'ordre de 30 % (non précisé dans le sujet). Il faut donc avoir une énergie primaire de l'ordre de $E = 60.000 \text{ kWh} = 2.10^{11} \text{ J}$.
Pour l'Uranium, l'énergie libérée est donnée par la même relation qu'à la question précédente, avec cette fois $E_{235} = 200 \text{ MeV}$.
On aurait donc $m = \frac{ME}{\mathcal{N}_A E_{235}} = 3 \text{ g}$

Pour le charbon, la seule information disponible est la tonne équivalent charbon. Il s'agit (l'énoncé ne le précise pas) de l'énergie thermique libérée par la combustion d'une tonne de charbon. On trouve alors qu'il faut environ 7t de charbon pour alimenter la maison.

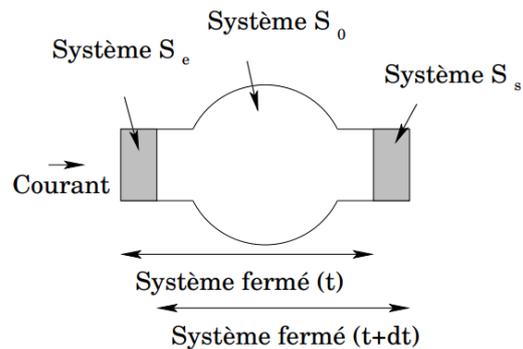
On a donc un facteur supérieur à 10^6 dans les masses nécessaires : l'Uranium est donc une source d'énergie bien plus compacte que le charbon ; cela rend par ailleurs le stockage de réserves stratégiques bien plus aisé dans le cas de l'Uranium.

II Du réacteur aux turbines

II.A Approche générale

13. On suppose que l'énergie mécanique du système est négligeable. Plusieurs approches sont possibles pour la description du système étudié, on peut suivre un système fermé pendant son déplacement (point de vue lagrangien, cas retenu ici) et étudier ensuite l'intersection entre t et $t+dt$, ou bien isoler une portion fixe (point de vue eulérien) et fabriquer un système fermé autour duquel on applique les lois de la physique.

Dans un système en écoulement permanent, on délimite un système fermé, contenant la zone sur laquelle on veut faire un bilan. On étudie l'évolution de ce système durant un temps dt . On note $S(t)$ le système à t et $S(t+dt)$ le système à $t+dt$. Ces systèmes peuvent être décomposés en sous-systèmes : le système S_0 est l'intersection de $S(t)$ et $S(t+dt)$, et on peut écrire que $S(t)$ est composé de S_0 et d'un système infinitésimal S_e , alors que $S(t+dt)$ est composé de S_0 et d'un système infinitésimal S_s . Au cours du temps dt , la portion de fluide reçoit une chaleur $\delta Q = P_{th}dt$ et un travail $\delta W = P_u dt$ de l'extérieur du fluide.



La masse du système fermé est conservée, ce qui implique que la masse δm des systèmes S_e et S_s est identique.

Si on applique le premier principe au système fermé, on obtient :

$dU = \delta W + \delta Q + \delta W_i$, où δW_i est le travail interne au fluide, c'est à dire le travail des forces de pression à l'entrée et à la sortie du système.

Si on note δV_e le volume de S_e , et P_e la pression à l'entrée, le travail correspondant est $\delta W_e = P_e \delta V_e$ (comme δV_e est perdu par le système, la variation de volume du système due à P_e est $-\delta V_e$).

De même, on obtient à la sortie $\delta W_s = -P_s \delta V_s$, car le volume δV_s est gagné par le système.

De plus, U est une fonction d'état extensive, donc $U(t+dt) = U_0 + \delta U_s$, alors que $U(t) = U_0 + \delta U_e$ (comme l'écoulement est stationnaire on a les mêmes U_0 dans les deux cas). Donc $dU = \delta U_s - \delta U_e$. (où δU_s et δU_e correspondent aux énergies internes respectives de S_s et S_e).

On obtient donc :

$$\delta U_s - \delta U_e = -P_s \delta V_s + P_e \delta V_e + \delta W + \delta Q.$$

Or, on a $\delta U_e + P_e \delta V_e = \delta H_e$, où δH_e est l'enthalpie de S_e . Et de même bien sûr pour S_s .

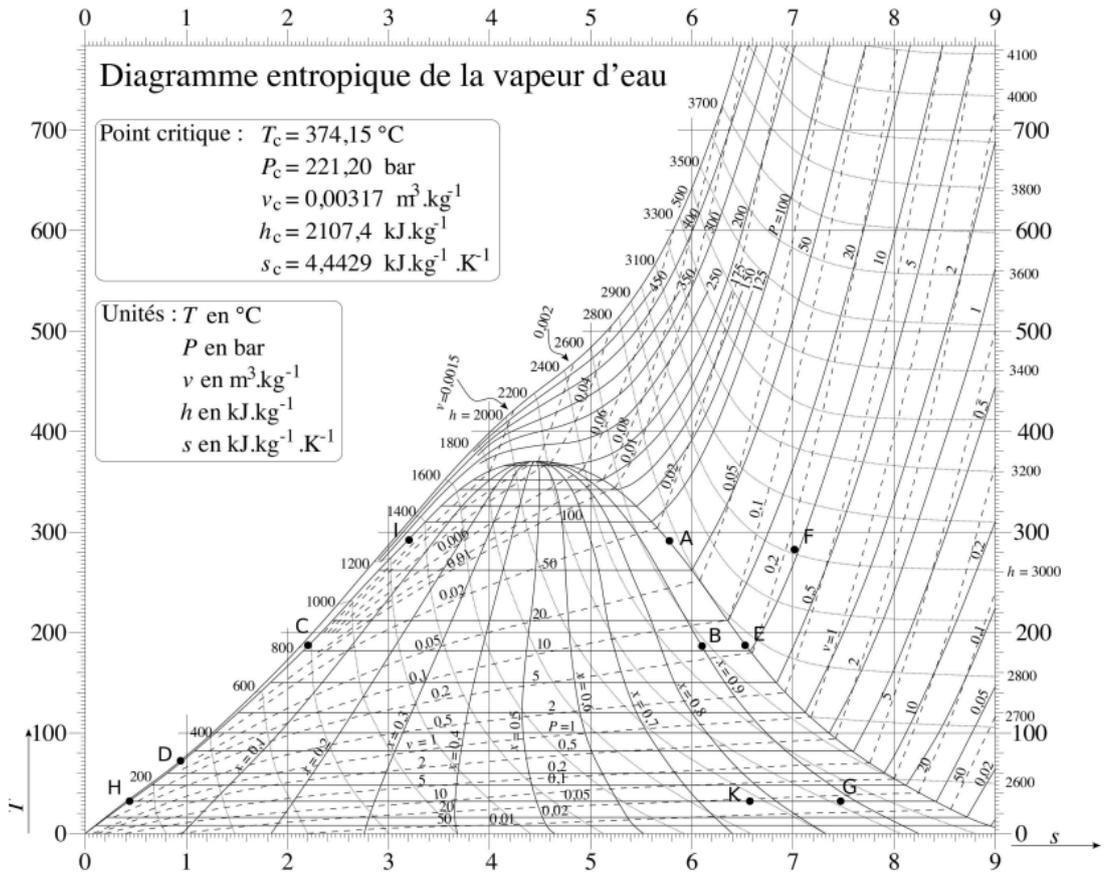
On a donc : $\delta H_s + \delta E_{m,s} - \delta H_e - \delta E_{m,e} = \delta W + \delta Q$.

On peut diviser par δm pour obtenir des quantités intensives :

$$h_s - h_e = (P_u + P_{th}) \frac{dt}{\delta m} \Rightarrow R(h_s - h_e) = P_u + P_{th}$$

II.B Analyse du cycle

14. On obtient :



Précisions sur la construction : ce diagramme s'analyse de la même façon que les diagrammes (p, h) plus usuels : il faut repérer les courbes isobares (qui sont horizontales dans la zone de mélange liquide-vapeur, dans le cas d'un corps pur) ; par ailleurs, la courbe de rosée est à droite puisque l'entropie de la vapeur est supérieure à celle du liquide. A partir de là, il faut simplement localiser les points à l'aide des valeurs de x et P données à chaque fois pour les points dans la zone de mélange ; T et P permettent de localiser F ; Attention à placer A et I sur la même ligne horizontale (ils sont nécessairement à la même température) ; quant à D , visiblement la dépendance en pression de l'entropie est négligeable loin du point critique, il est donc presque sur la courbe de saturation.

Note : Le point K servira dans la suite.

II.B.1 Enthalpies massiques

15. Les indications à droite du graphe permettent d'identifier les courbes d'enthalpie et de conclure que $h_F \simeq 3000 \text{ kJ.kg}^{-1}$.
16. On a dans les deux cas $h = (1-x)h_L + xh_v$, ce qui donne :
 $h_B = 2,58.10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $h_G = 2,27.10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$.
Les valeurs obtenues sont cohérentes avec les courbes d'enthalpie.
17. Par lecture graphique $h_D \simeq 300 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

II.B.2 Calcul des différents débits

18. On a $R_0 = R_1 + R_3$ par conservation du débit total; $R_2 = x_B R_1$ (conservation du débit de vapeur à travers le séparateur); $R_4 = (1-x_B)R_1$ (conservation du débit de liquide).
19. On applique la relation donnée question ?? au surchauffeur, dans lequel $P_u = P_{th} = 0$. On a donc :
 $R_3 h_I + R_2 h_F - R_2 h_E - R_3 h_A = 0$.
20. $R_0 = 640 \text{ kg.s}^{-1}$ est donné; pour les autres débits il faut combiner les équations :
 $R_3(h_A - h_I) = x_B R_1(h_F - h_E)$ et $R_0 = R_1 + R_3$.
Les valeurs de h non encore calculées sont données dans les tableaux de valeurs (liquide saturant ou vapeur saturante selon les cas).

Soit : $R_1 = R_0 \frac{h_A - h_I}{h_A - h_I + x_B(h_F - h_E)} = 566 \text{ kg.s}^{-1}$;

$$R_3 = R_0 - R_1 = 74 \text{ kg.s}^{-1}$$

$$R_2 = x_B R_1 = 509 \text{ kg.s}^{-1}$$

$$R_4 = (1 - x_B)R_1 = 57 \text{ kg.s}^{-1}$$

II.B.3 Au niveau des turbines

21. Les transformations étant adiabatiques, si elles sont réversibles elles sont isentropiques. On voit graphiquement que ce n'est pas le cas, l'entropie augmente lors de ces transformations (cela correspond à l'entropie créée). Les causes de cette irréversibilité sont essentiellement mécaniques en raison de la rotation rapide des turbines (les transferts thermiques sont trop lents pour apporter une irréversibilité significative).

II.B.4 Au niveau du condenseur

22. On a le même type de relation : en notant R_t le débit du circuit tertiaire, C la capacité calorifique de l'eau (qui n'était pas donnée, même si on peut la retrouver par lecture graphique en lisant $h(100) - h(0)$) et ΔT la variation de température associée, $R_t c \Delta T = R_2(h_G - h_H)$.

On a alors : $R_t = \frac{R_2(h_G - h_H)}{c \Delta T} = 5,2.10^4 \text{ kg.s}^{-1}$ (en prenant $c = 4,2 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$)

Cela correspond à un débit volumique de $52 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$, on commence donc à avoir des valeurs comparables à une rivière. La limite de l'élevation de température est essentiellement écologique, de façon à ne pas trop élever la température de la rivière utilisée...

II.C Rendement du cycle

II.C.1 Rendement effectif

23. On peut écrire $r = -\frac{P_{HP}+P_{BP}}{Q_{GV}}$ (l'énergie utile est récupérée au niveau des turbines, l'énergie coûteuse est la chaleur fournie au générateur de vapeur).

On a donc
$$r = \frac{R_1(h_A-h_B)+R_2(h_F-h_G)}{R_0(h_A-h_D)} = 0,30$$

Cela donne un rendement de l'ordre de 30 %, qui est assez classique pour une centrale thermique ou un moteur thermique (les centrales à gaz pouvant faire un peu mieux et atteindre un rendement de plus de 40 %).

24. Il y aurait dans ce cas une unique turbine partant de A et arrivant à la basse pression (0,05 bar). En prolongeant la droite AB (ce qui est raisonnable, une turbine associée à une variation plus grande de pression créant une entropie supplémentaire), on arrive au point K . On peut alors estimer le rendement simplement à l'aide des variations d'enthalpie lors des phases AK (motrice) et CA (chauffage par le primaire), car le débit est conservé durant tout le cycle $A \rightarrow K \rightarrow H \rightarrow C \rightarrow A$:

$$r = \frac{h_A-h_K}{h_A-h_C} = 0,30$$

(on lit $h_K = 1950 \text{ kJ.kg}^{-1}$).

Soit un rendement inchangé (aux approximations liées à la position du point K près). La précision de l'étude n'est donc pas suffisante pour conclure sur l'intérêt (ou non) du surchauffeur vis-à-vis du rendement, une étude plus précise serait nécessaire. Le surchauffeur peut cependant avoir d'autres intérêts, par exemple de limiter la quantité de liquide dans les turbines, ce qui augmente leur durée de vie.