CORRECTION TRAIN EPICYCLOIDAL (TEC)

Q1) On écrit les conditions de roulement sans glissement en ***I*** et ***J*** en raisonnant en ***vitesse relative*** par rapport au porte-satellite ***2***.

*- roulement sans glissement en **I** entre **3** et **0** :* $\omega_{3/2}.Z_3 = +\,\omega_{0/2}.Z_0$

*- roulement sans glissement en J entre **3** et **1** :* $\omega_{3/2}.Z_3 = -\,\omega_{1/2}.Z_1$

d'où : $(\omega_{0/0} - \omega_{2/0}).Z_0 = -(\omega_{1/0} - \omega_{2/0}).Z_1$ soit $(0 - \omega_2).Z_0 = -(\omega_1 - \omega_2).Z_1$

d'où $\omega_2.Z_1 + \omega_2.Z_0 = \omega_1.Z_1$

et donc finalement :

$$\boxed{\lambda = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_0}}$$

Q2) Utilisons la relation précédente issue du roulement sans glissement en ***J*** entre ***3*** et ***1*** :

$$\omega_{3/2}.Z_3 = -\,\omega_{1/2}.Z_1$$

soit : $(\omega_{3/0} - \omega_{2/0}).Z_3 = -(\omega_{1/0} - \omega_{2/0}).Z_1$ d'où $\omega_3.Z_3 - \omega_2.Z_3 = -\,\omega_1.Z_1 + \omega_2.Z_1$

et $\omega_3.Z_3 = -\,\omega_1.Z_1 + \omega_2.(Z_1 + Z_3)$ divisons tout par ***ω₁*** $\frac{\omega_3}{\omega_1}.Z_3 = -Z_1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}.(Z_1 + Z_3)$

or $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_0}$

donc $\frac{\omega_3}{\omega_1}.Z_3 = -Z_1 + \frac{Z_1}{Z_1 + Z_0}.(Z_1 + Z_3) = \frac{-Z_1.(Z_1 + Z_0) + Z_1.(Z_1 + Z_3)}{Z_1 + Z_0} = \frac{Z_1.(Z_3 - Z_0)}{Z_1 + Z_0}$

d'où $\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_3} \cdot \frac{Z_3 - Z_0}{Z_1 + Z_0}$

Par ailleurs on a une condition géométrique au niveau des diamètres primitifs des roues dentées ;

$$\frac{Dp_1}{2} + Dp_3 = \frac{Dp_0}{2} \quad \text{soit} \quad Dp_1 + 2.Dp_3 = Dp_0$$

et avec les nombres de dents : $Z_1 + 2.Z_3 = Z_0$

d'où $\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_3} \cdot \frac{Z_3 - Z_0}{Z_1 + Z_0} = \frac{Z_1}{Z_3} \cdot \frac{Z_3 - Z_1 - 2.Z_3}{Z_1 + Z_1 + 2.Z_3} = -\frac{Z_1}{Z_3} \cdot \frac{Z_1 + Z_3}{2.(Z_1 + Z_3)}$

et donc finalement :

$$\boxed{\mu = \frac{\omega_3}{\omega_1} = -\frac{Z_1}{2.Z_3}}$$

Q3) Calculons l'énergie cinétique de chaque pièce en mouvement :

*<u>- arbre **1** :</u>* simple rotation autour d'un ***axe fixe*** donc de la forme ***« ½ . J . ω² »*** avec ***J*** le moment d'inertie autour de l'axe de rotation.

On a donc ici : $\boxed{Ec_1 = \frac{1}{2}. I_1.\omega_1{}^2}$

*<u>- porte-satellite **2** :</u>* identique à précédemment d'où : $Ec_2 = \frac{1}{2}.I_2.\omega_2{}^2$

Avec par ailleurs : $\lambda = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ soit $\omega_2 = \lambda.\omega_1$ et donc $\boxed{Ec_2 = \frac{1}{2}.I_2.\lambda^2.\omega_1{}^2}$

*<u>- satellite **3** :</u>* le mouvement n'est plus une simple rotation autour d'un axe fixe, utilisons alors le comoment entre le torseur cinématique et le torseur cinétique (en prenant le point ***A*** pour écrire ces deux torseurs).

$$Ec_3 = \frac{1}{2}.\left\{\overrightarrow{\Omega_{3/0}}\ ,\ \overrightarrow{V_{A\in 3/0}}\right\}_A \otimes \left\{m\overrightarrow{V_{A\in 3/0}}\ ,\ \overrightarrow{\sigma_{A\in 3/0}}\right\}_A$$

Comme ***A*** est le centre de gravité du satellite on a :

$$\overrightarrow{\sigma_{A\in 3/0}} = \tilde{I}(A,3)\ .\ \omega_{3/0} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{R3} . \begin{bmatrix} \omega_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R3} = I_3.\omega_3.\overrightarrow{x_3} = I_3.\omega_3.\overrightarrow{x_0}$$

<u>Nota :</u> chaque satellite ***3*** est supposé cylindrique avec $A\overrightarrow{x_0}$ comme axe de révolution et on lui associe la base indicée ***3*** avec $\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{x_0}$

Calcul de $\overrightarrow{V_{A\in 3/0}}$: $\overrightarrow{V_{A\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 3/2}} + \overrightarrow{V_{A\in 2/0}}$ avec $\overrightarrow{V_{A\in 3/2}} = \vec{0}$ car ***3/2*** est une rotation en ***A***

et $\overrightarrow{V_{A\in 2/0}} = -d.\omega_2.\overrightarrow{z_2}$ car ***2/0*** est une rotation autour de $A\overrightarrow{x_2}$ (la vitesse est portée par $-\overrightarrow{z_2}$)

d'où :

$$Ec_3 = \frac{1}{2}.\left\{\omega_3.\overrightarrow{x_0}\ ,\ -d.\omega_2.\overrightarrow{z_2}\right\}_A \otimes \left\{-m.d.\omega_2.\overrightarrow{z_2}\ ,\ I_3.\omega_3.\overrightarrow{x_0}\right\}_A = \frac{1}{2}.\left(I_3.\omega_3{}^2 + m.d^2.\omega_2{}^2\right)$$

or $\omega_3 = \mu.\omega_1$ et $\omega_2 = \lambda.\omega_1$ d'où $\boxed{Ec_3 = \frac{1}{2}.\left(I_3.\mu^2 + m.d^2.\lambda^2\right).\omega_1{}^2}$

Finalement (avec trois satellites) :

$$Ec = Ec_1 + Ec_2 + 3.Ec_3 = \frac{1}{2}.\left(I_1 + I_2.\lambda^2 + 3.I_3.\mu^2 + 3.m.d^2.\lambda^2\right).\omega_1{}^2$$

Soit : $\boxed{I_{éq} = I_1 + \lambda^2.(I_2 + 3.m.d^2) + 3.I_3.\mu^2}$

Q4) Le théorème de l'énergie cinétique est bien adapté ici pour une approche globale d'un mécanisme à un degré de mobilité.
On va donc appliquer ce théorème à l'ensemble ***E*** des pièces en mouvement, c'est-à-dire :

E= (arbre moteur 1, porte-satellite 2, trois satellites 3)

Puissances extérieures :

*- action de la pesanteur sur les arbres **1** et **2** :* les centres de gravité de ces deux pièces sont sur l'axe $A\overrightarrow{x_0}$ donc immobiles au cours du mouvement. Le poids de ces pièces ne travaille donc pas et la puissance développée par la pesanteur est ainsi nulle : $\boxed{P(pes \to 1+2/0)=0}$

*- action de la pesanteur sur un satellite **3** :* utilisons le comoment du torseur d'action de la pesanteur avec le torseur cinématique :

$$P(pes \to 3/0)= \left\{-m.g.\overrightarrow{y_0}\ ,\ \vec{0}\right\}_A \otimes \left\{\overrightarrow{\Omega_{3/0}}\ ,\ \overrightarrow{V_{A\in 3/0}}\right\}_A$$

avec : $\overrightarrow{V_{A\in 2/0}} = -d.\omega_2.\overrightarrow{z_2}$ (déjà vu à la question précédente)

d'où : $$P(pes \to 3/0) = -m.g.\overrightarrow{y_0} \bullet -d.\omega_2.\overrightarrow{z_2} = m.g.d.\omega_2.\overrightarrow{y_0}\bullet\overrightarrow{z_2} = m.g.d.\omega_2.\cos(\alpha-\tfrac{\Pi}{2})$$

Soit : $$\boxed{P(pes \to 3/0)=m.g.d.\lambda.\omega_1.\sin\alpha}$$

*- action du moteur sur l'arbre **1** :* on a une simple rotation autour d'un axe fixe donc

$$\boxed{P(moteur \to 1/0)=C_1.\ \omega_1}$$

*- action du couple résistant sur l'arbre **2** :* on a une simple rotation autour d'un axe fixe donc

$$\boxed{P(couple\,résistant \to 2/0)=-C_2.\ \omega_2=-C_2.\ \lambda.\ \omega_1}$$

*- deux pivots **1/0** et **2/0** :* liaisons ***parfaites avec le bâti*** donc les puissances (extérieures) développées sont nulles.

*- engrènement des trois satellites avec la couronne à denture intérieure **3/0** :* on a un ***roulement sans glissement*** (en ***I***) ***avec le bâti*** donc les puissances développées sont nulles.

Puissances intérieures :

*- pivots **3/2** entre les satellites **3** et le porte-satellite **2** :* liaisons ***parfaites*** donc les puissances (intérieures) développées sont nulles.

*- engrènement des trois satellites avec l'arbre central **1** :* on a un ***roulement sans glissement*** en ***J*** donc les puissances développées sont nulles.

Energie cinétique : en utilisant l'inertie équivalente ***$I_{éq}$*** (question précédente) on a : $\boxed{Ec=\frac{1}{2}.I_{éq}.\omega_1^{\,2}}$

Ecriture du théorème de l'énergie cinétique : $$\frac{d(Ec)}{dt} = \sum Pext + \sum Pint$$

$$\frac{1}{2}.I_{éq}.2.\omega_1.\frac{d\omega_1}{dt} = \left(0+3.m.g.d.\lambda.\omega_1.\sin\alpha+C_1.\omega_1-C_2.\lambda.\omega_1\right)+\left(0+0\right)$$

Soit : $$I_{éq}.\frac{d\omega_1}{dt} = 3.m.g.d.\lambda.\sin\alpha + C_1 - C_2.\lambda$$

Et finalement :

$$\boxed{C_1 = I_{éq}.\frac{d\omega_1}{dt}+C_2.\lambda-3.m.g.d.\lambda.\sin\alpha}$$