SCOOTER ELECTRIQUE

CAHIER DES CHARGES

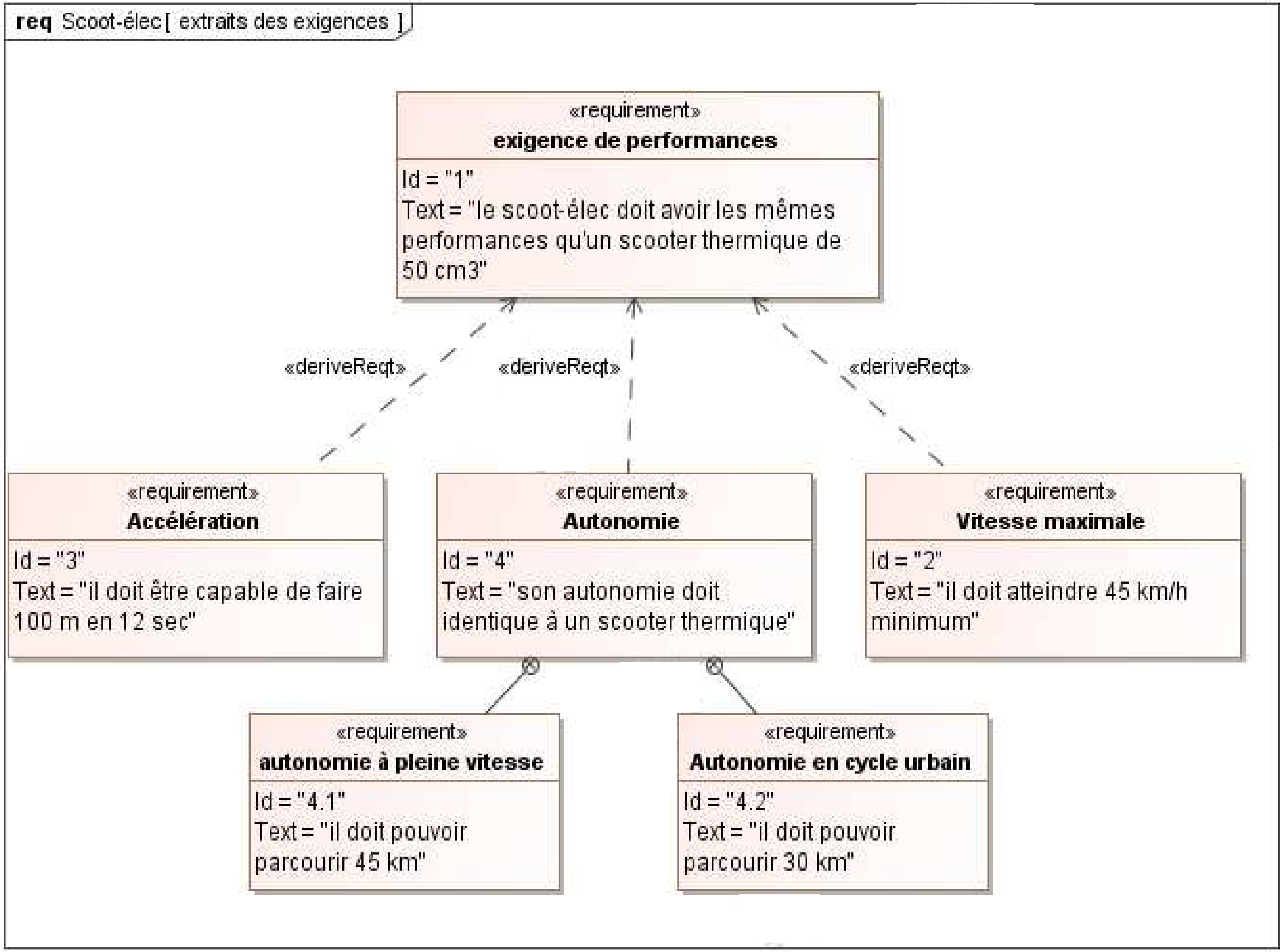


Diagramme des exigences

CAHIER DES CHARGES

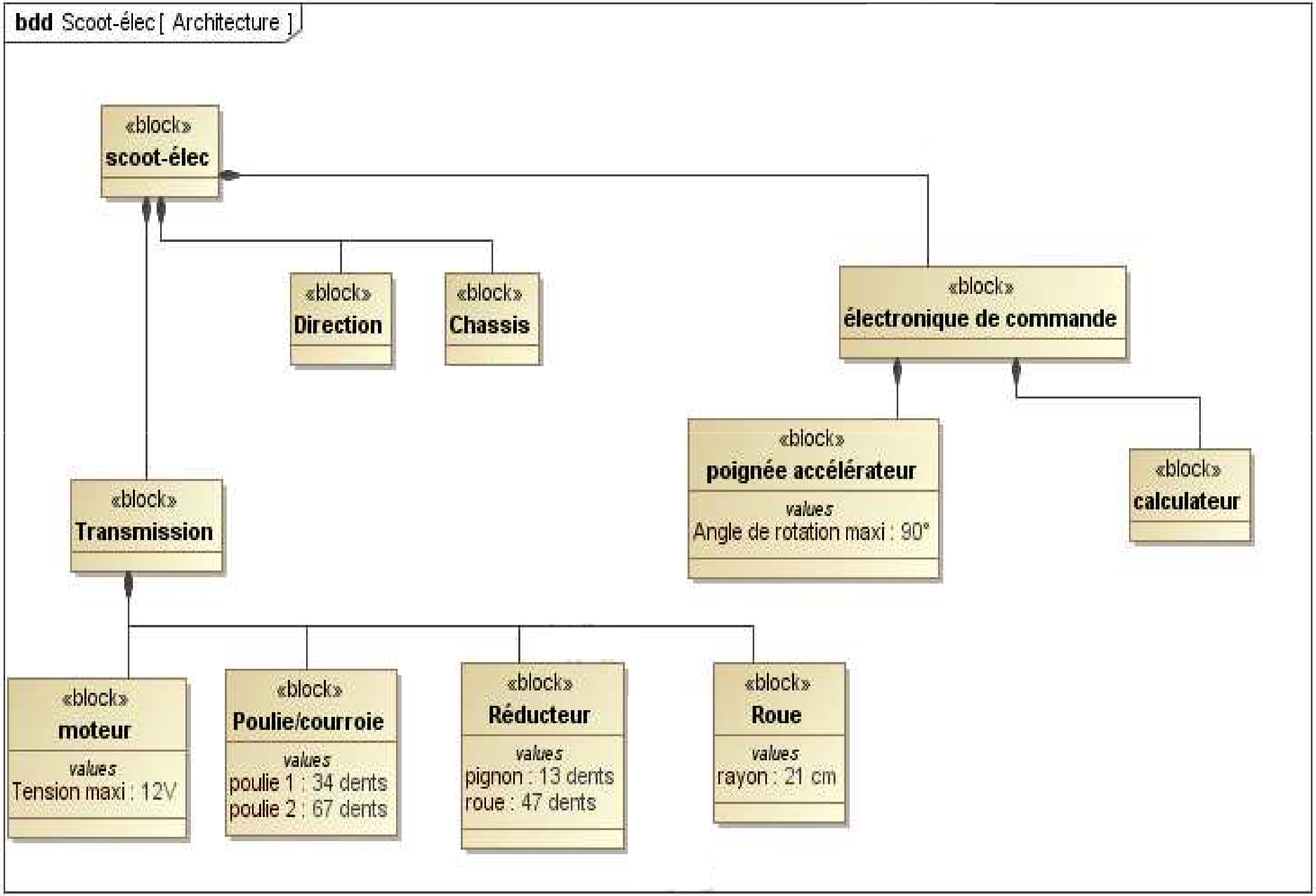
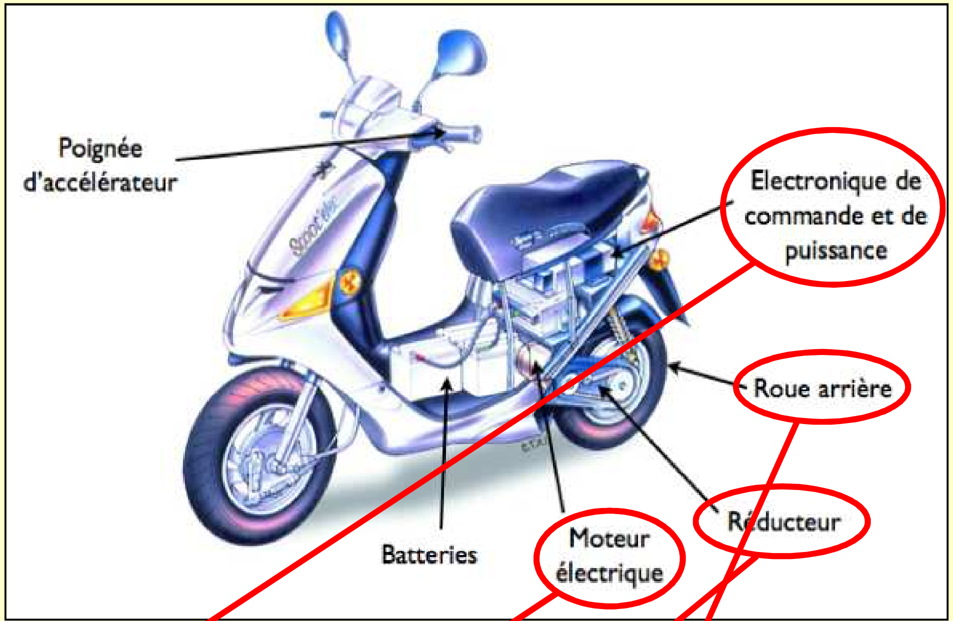


Diagramme de définition des blocs

Question 1

Compléter le schéma-bloc fonctionnel du Scoot-élec. Préciser la nature et les unités des grandeurs entre les blocs.



batteries

Angle poignée (°) → **Variateur** → **Electronique de commande et de puissance** → **Moteur électrique** → **Réducteur** → **Roue arrière** → Vitesse scooter (m/s)

Tension de commande (V)

Tension moteur (V)

Vitesse rot moteur (rad/s)

Vitesse rotation roue (rad/s)

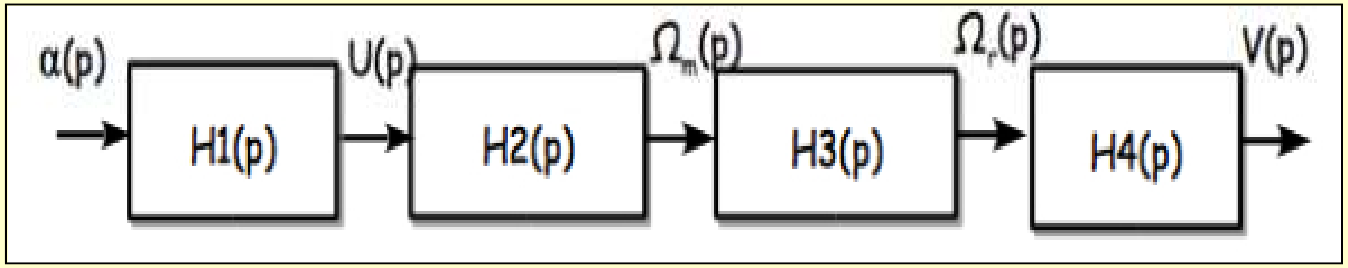
Question 2

Est-ce un système asservi ? Pourquoi ?

Non car il n'y a pas de capteur pour « contrôler » la bonne réalisation du processus.

pas de boucle retour (rétroaction)

On propose le schéma bloc suivant :

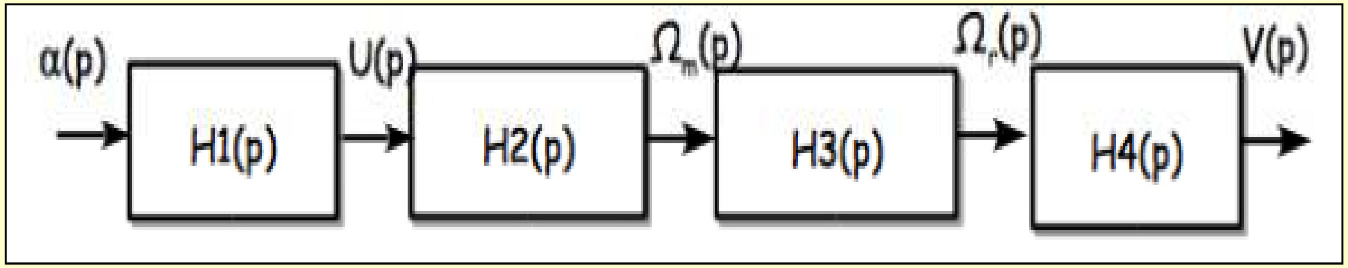


Question 3

La fonction de transfert $H_1(p)$ peut être modélisée par un gain pur K_1
Déterminer la valeur de K_1 en V/rad.

« L'électronique de commande associée à la poignée accélératrice délivre une tension maximale de ***12V*** pour un angle de consigne de ***90°*** »

$$H_1(p) = K_1 = \frac{12}{\pi/2} = 7{,}64 \ \ V/rad$$



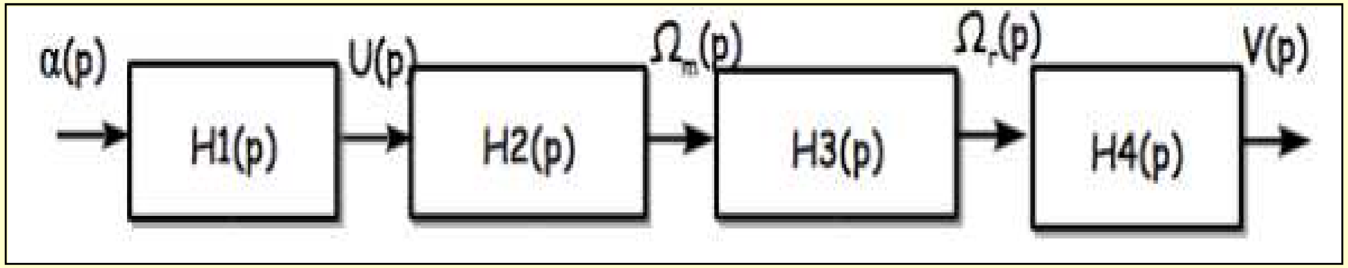
Question 4

Sachant que la roue arrière ne dérape pas (roule sans glisser), en déduire la fonction de transfert H4(p)

Le rayon R_{roue} de la roue arrière est de 21cm

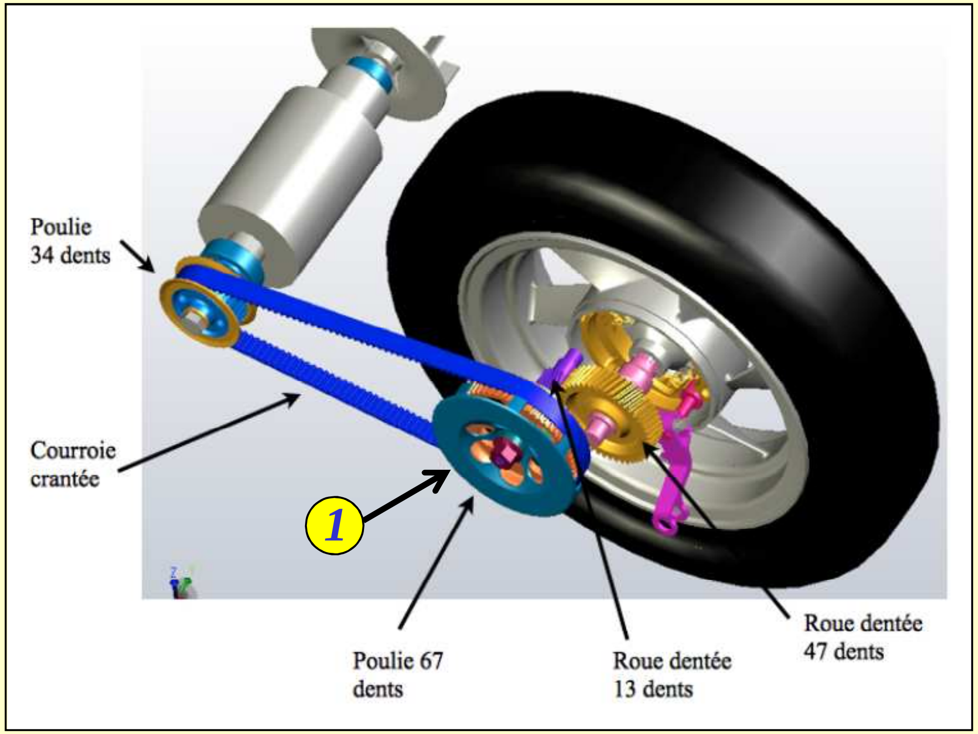
Roulement sans glissement : $v(t) = R_{roue}.\omega_r(t)$

$$\boxed{H4(p) = \frac{V(p)}{\Omega_r(t)} = R_{roue} = 0{,}21\ m}$$



Le réducteur est constitué :

- ***de poulies crantées (67 et 34 dents)***
- ***d'une courroie crantée***
- ***d'un engrenage constitué de deux roues dentées de 13 et 47 dents***

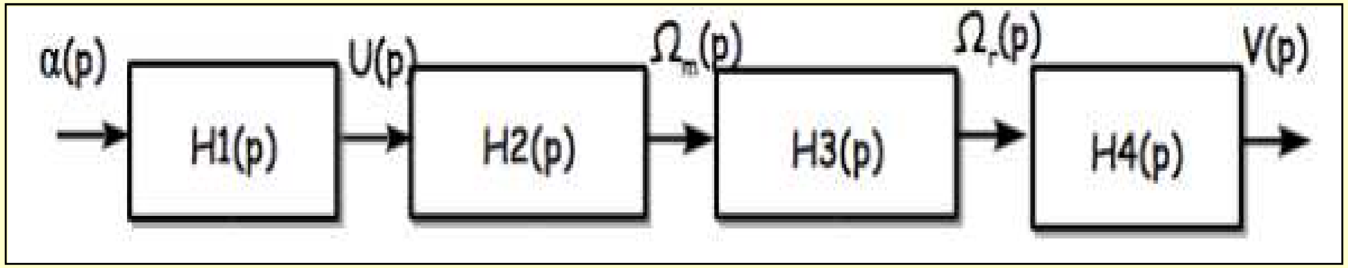


Question 5

Donner la fonction de transfert $H_3(p)$.

$$H3(p)=\frac{\Omega_r(p)}{\Omega_m(p)}=\frac{\Omega_r}{\Omega_1}\times\frac{\Omega_1}{\Omega_m}=\left(-\frac{Z_{petite\,roue\,dentée}}{Z_{grande\,roue\,dentée}}\right)\times\frac{Z_{petite\,poulie}}{Z_{grande\,poulie}}=-\frac{13}{47}\times\frac{34}{67}$$

$$\boxed{H3(p)=-0{,}14\ \ sans\ unité}$$



Les quatre équations régissant un moteur à courant continu sont classiquement :

- ***équation mécanique :*** $C_m(t) - C_r(t) = J \times \dfrac{d\omega_m(t)}{dt}$
- ***équation électrique :*** $u(t) = e(t) + Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt}$
- ***équations de couplage :*** $C_m(t) = k.i(t) \qquad e(t) = k.\omega_m(t)$

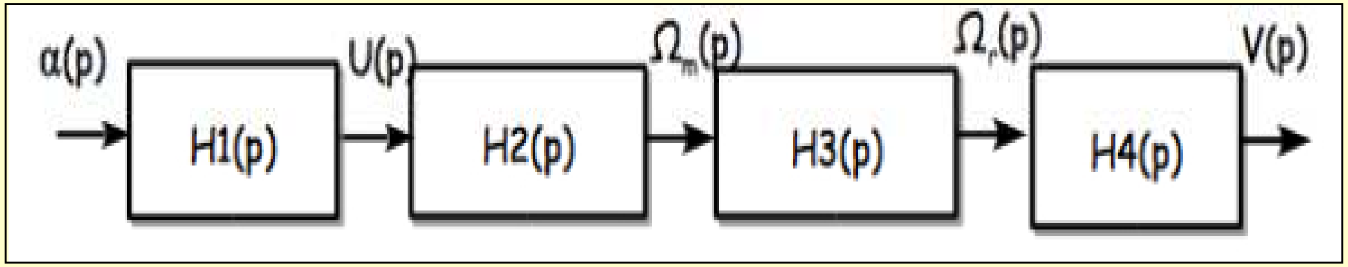
On suppose que L et Cr(t) sont négligeables.

Question 6

Déterminer la fonction de transfert $H_2(p)$

$$\begin{cases} C_m = J.p.\Omega_m \\ C_m = k.I \\ E = k.\Omega_m \\ U = E + R.I = k.\Omega_m + R.\dfrac{J.p}{k}.\Omega_m = \Omega_m.\left(k + R.\dfrac{J.p}{k}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\overbrace{\boxed{\dfrac{1}{k}}}^{K}}{1 + \underbrace{\boxed{\dfrac{RJ}{k^2}}}_{\tau}p}$$



Question 7

Donner la fonction de transfert du système complet H(p)

$$H(p)=\frac{V(p)}{\alpha(p)}=\frac{V(p)}{\Omega_r(p)}\times\frac{\Omega_r(p)}{\Omega_m(p)}\times\frac{\Omega_m(p)}{U(p)}\times\frac{U(p)}{\alpha(p)}$$

$$=0{,}21\times(-0{,}14)\times\frac{K}{1+\tau.p}\times 7{,}64$$

$$\boxed{H(p)=\frac{V(p)}{\alpha(p)}=-0{,}22\times\frac{K}{1+\tau.p}}$$

$$H(p) = \frac{V(p)}{\alpha(p)} = -0{,}22 \times \frac{K}{1+\tau.p}$$

Question 8

Déterminer en fonction de K l'expression de V_{max}

→ vitesse du scooter en régime permanent lorsqu'on soumet le système à un échelon de 90° (on accélère à fond)

Le système étant stable (premier ordre) on peut utiliser le théorème de la valeur finale :

$$V_{\max} = \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{p\to 0} p.V(p)$$

$$= \lim_{p\to 0} p.H(p).\alpha(p) = \lim_{p\to 0} \cancel{p} \times \left(-0{,}22 \times \frac{K}{1+\tau.p}\right) \times \left(\frac{\pi/2}{\cancel{p}}\right)$$

$$= -0{,}22 \times K \times \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{V_{\max} = -0{,}35.K}$$

<u>Nota :</u> le signe négatif traduit simplement l'inversion du sens de rotation entre moteur et roue, il suffit d'inverser le sens de rotation du moteur pour avoir une vitesse positive.

$$V_{max} = +0{,}35.K$$

Question 9

Déterminer la valeur de K pour respecter le cahier des charges

« Sa vitesse maximale est de 45km/h »

$$V_{max} = 45\ km/h = 45 \times \frac{1000}{3600} = 12{,}5\ m/s$$

$$\Rightarrow K = \frac{12{,}5}{0{,}35} \Rightarrow K = 35{,}7\ \frac{rad/s}{V}\ ou\ \frac{A}{N.m}$$

$V^{-1}.s^{-1}$

$A.N^{-1}.m^{-1}$

$$H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\boxed{\frac{1}{k}}\ \mathbf{K}}{1+\boxed{\frac{RJ}{k^2}}p}\ \tau$$

$$E = k.\Omega_m$$

$$C_m = k.I$$

Question 10

Donner la relation entre X(p) et V(p) et en déduire l'expression de X(p) pour un échelon α_0 = 90° en fonction de τ

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow V(p) = p.X(p) \Rightarrow X(p) = \frac{1}{p}.V(p)$$

Par ailleurs on avait :

$$\boxed{H(p) = \frac{V(p)}{\alpha(p)} = +0,22 \times \frac{K}{1+\tau.p}}$$

$$\Rightarrow X(p) = \frac{1}{p} \times \underbrace{\alpha(p)}_{\frac{\pi/2}{p}} \times 0,22 \times \frac{\overbrace{K}^{35,7}}{1+\tau.p}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(p) = \frac{12,3}{p^2(1+\tau.p)}}$$

Question 11

Donner l'expression de $x(t)$ en fonction de τ

On vient de mettre en place :

$$X(p) = \frac{12{,}3}{p^2(1+\tau.p)} \Rightarrow \frac{A.p+B}{p^2} + \frac{C}{1+\tau.p}$$

$$\Rightarrow 12{,}3 = (A.p+B)\times(1+\tau.p) + C.p^2$$

$$\Rightarrow 12{,}3 = p^2.(A.\tau+C) + p.(B.\tau+A) + B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = 12{,}3 \\ B.\tau + A = 0 \\ A.\tau + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 12{,}3 \\ A = -12{,}3.\tau \\ C = +12{,}3.\tau^2 \end{cases}$$

d'où

$$X(p) = \frac{-12{,}3.\tau}{p} + \frac{12{,}3}{p^2} + \frac{12{,}3.\tau^2}{1+\tau.p} \Rightarrow X(p) = \frac{-12{,}3.\tau}{p} + \frac{12{,}3}{p^2} + \frac{12{,}3.\tau}{p+\frac{1}{\tau}}$$

et dans le domaine temporel :

$$x(t) = -12{,}3.\tau + 12{,}3.t + 12{,}3.\tau.e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow x(t) = 12{,}3\times\left(t-\tau+\tau.e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Question 12

Choisir le moteur qui permette de respecter le cahier des charges.

Deux moteurs possédant la valeur de K déterminée (≈35 rad/Vs) sont disponibles :

- **le moteur M_1 a une constante de temps $\tau_1 = 3s$**
- **le moteur M_2 a une constante de temps $\tau_2 = 5s$**

Le cahier des charges impose :

« il parcourt le 100 m départ arrêté en 12 secondes »

On vient de mettre en place :

$$x(t) = 12{,}3 \times \left(t - \tau + \tau . e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

- $\tau = \tau_1 = 3s \Longrightarrow x(t) = 12{,}3 \times \left(12 - 3 + 3.e^{-\frac{12}{3}} \right) = 111\ m$ **OK**
- $\tau = \tau_2 = 5s \Longrightarrow x(t) = 12{,}3 \times \left(12 - 5 + 5.e^{-\frac{12}{5}} \right) = 91{,}7\ m$ **pas OK**

Question 13

Exprimer v(t) (réponse à un échelon de 90°).

Tracer l'allure de la courbe représentative.

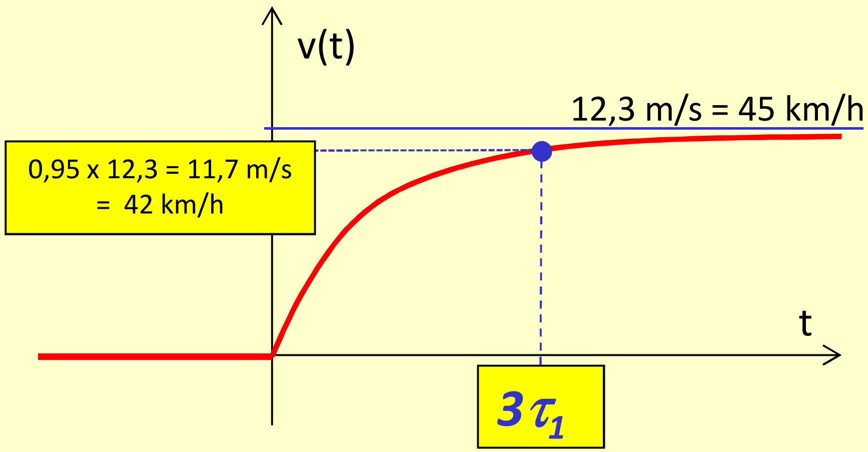
Quel est le temps mis par le scooter pour atteindre 95% de V_{max} ?

On avait :

$$x(t) = 12{,}3 \times \left(t - \tau + \tau . e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

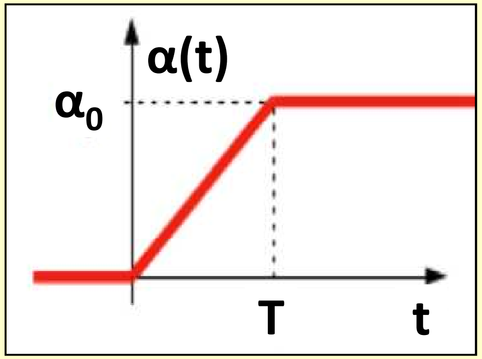
$$\Rightarrow v(t) = \dot{x}(t) = 12{,}3 \times \left[1 - 0 + \tau \times \left(\frac{-1}{\tau} \right) \times e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \Rightarrow \boxed{v(t) = 12{,}3 \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)}$$

On reconnaît la réponse d'un premier ordre à un échelon, d'où le tracé :



95% de V_{max} atteint à $3\tau_1 = 9$ s

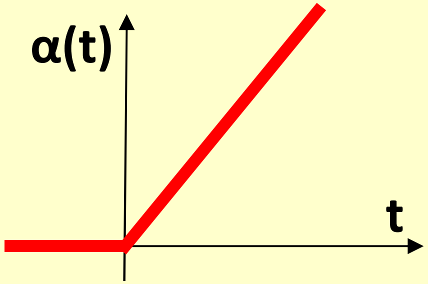
La consigne angulaire correspond, de manière plus réaliste, au signal représenté ci-contre.



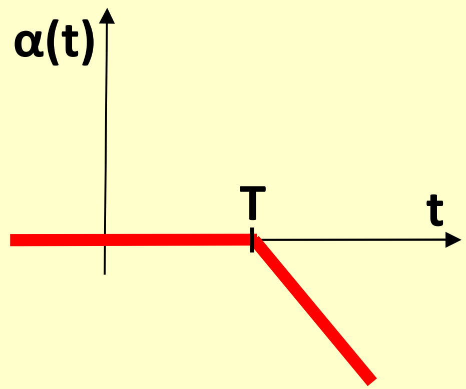
Question 14

Donner l'expression temporelle de ce signal α(t) (on notera u(t) la fonction échelon unitaire) puis exprimer sa transformée de Laplace α(p)

On a une rampe de pente $\dfrac{\alpha_0}{T}$ ***associée à une rampe « inversée » retardée de T***



+



rampe — rampe retardée

$$\alpha(t) = \boxed{\frac{\alpha_0}{T}\times t\times u(t)} - \boxed{\frac{\alpha_0}{T}\times(t-T)\times u(t-T)}$$

$\boxed{\dfrac{\alpha_0}{T.p^2}}$

Théorème du retard

$\boxed{\dfrac{\alpha_0}{T.p^2}\times e^{-T.p}}$

$$\alpha(p) = \frac{\alpha_0}{T.p^2}\times(1-e^{-T.p})$$

$$\boxed{\alpha(p) = \frac{\pi}{2.T.p^2}\left(1-e^{-T.p}\right)}$$

Question 15

Donner alors l'expression de V(p) en fonction de τ et T

On sait que :

$$\alpha(p) = \frac{\pi}{2.T.p^2}\left(1 - e^{-T.p}\right)$$

$$H(p) = \frac{V(p)}{\alpha(p)} = +0{,}22 \times \frac{K}{1+\tau.p}$$

35,7

$$V(p) = \left[0{,}22 \times \frac{35{,}7}{1+\tau.p}\right] \times \left[\frac{\pi}{2.T.p^2}\left(1 - e^{-T.p}\right)\right]$$

$$\boxed{V(p) = \frac{12{,}3.(1-e^{-Tp})}{T.p^2.(1+\tau.p)}}$$

Question 16

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle V(p) obtenue

$$\boxed{V(p)=\frac{12,3.(1-e^{-Tp})}{T.p^2.(1+\tau.p)}}$$

Cherchons à mettre sous la forme : $V(p)=\frac{12,3\times(1-e^{-Tp})}{T}\times\left[\frac{A\,p+B}{p^2}+\frac{C}{1+\tau.p}\right]$

$\Rightarrow$ $(A.p+B)\times(1+\tau.p)+C.p^2=1$

$\Rightarrow$ $p^2\times(A.\tau+C)+p\times(B.\tau+A)+B=1$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}B=1\\B.\tau+A=0\\A.\tau+C=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{cases}B=1\\A=-\tau\\C=\tau^2\end{cases}}$

d'où

$$V(p)=\frac{12,3\times(1-e^{-Tp})}{T}\times\left[\frac{-\tau}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{\tau^2}{1+\tau.p}\right]$$

$\Rightarrow$ $$\boxed{V(p)=\frac{12,3\times(1-e^{-Tp})}{T}\times\left[\frac{-\tau}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{\tau}{\frac{1}{\tau}+p}\right]}$$

Question 17

Donner l'expression temporelle v(t).

On vient de mettre en place :

$$V(p) = \frac{12{,}3 \times (1 - e^{-Tp})}{T} \times \left[\frac{-\tau}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{\tau}{\frac{1}{\tau} + p} \right]$$

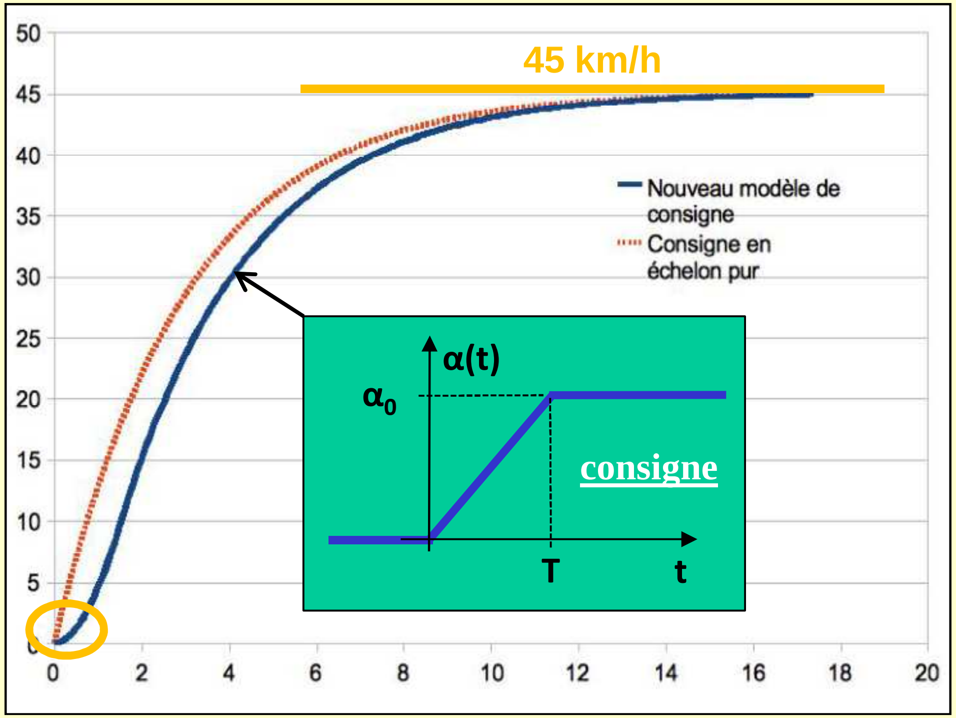
$$\Rightarrow V(p) = \underbrace{\frac{12{,}3}{T}}_{\text{réel}} \times \left[\underbrace{\frac{-\tau}{p}}_{\text{échelon}} + \underbrace{\frac{1}{p^2}}_{\text{rampe}} + \underbrace{\frac{\tau}{\frac{1}{\tau} + p}}_{\text{exponentielle}} \right] - \frac{12{,}3}{T} \times \underbrace{e^{-Tp}}_{\text{retard}} \times \left[\frac{-\tau}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{\tau}{\frac{1}{\tau} + p} \right]$$

Dans le domaine temporel :

$$v(t) = \frac{12{,}3}{T} \times \left[-\tau + t + \tau . e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \times \underbrace{u(t)}_{\text{Échelon unitaire}} - \frac{12{,}3}{T} \times \left[-\tau + (t - T) + \tau . e^{-\frac{t-T}{\tau}} \right] \times \underbrace{u(t - T)}_{\text{Échelon unitaire retardé}}$$

Question 18

Justifier l'allure de la courbe v(t).



On a bien :

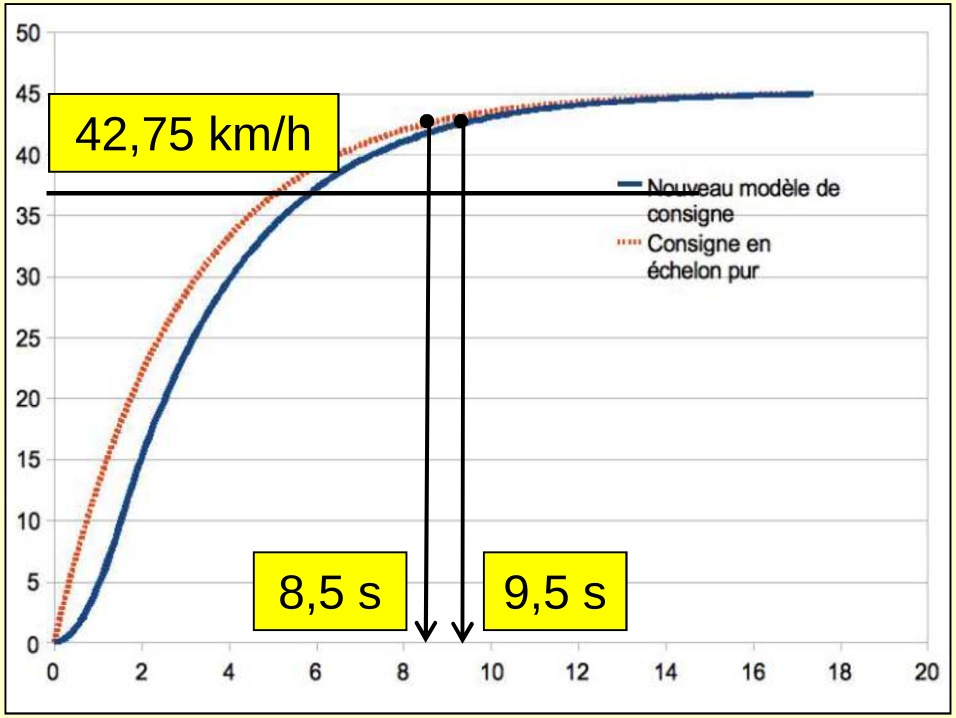
- *pente nulle à l'origine (due à la rampe)*
- *asymptote horizontale quand t tend vers l'infini (due à l'échelon final)*

Nota : *il ne s'agit pas pour autant d'un système du second ordre*

$$V(p) = \frac{12{,}3.(1-e^{-Tp})}{T.p^2.(1+\tau.p)}$$

Question 19

Mesurer le temps de réponse à 5% et le comparer avec celui obtenu par l'approximation de commande en échelon pur.
Conclure quant à la pertinence du modèle.



On relève :

- $tr_{5\%} = 9{,}5$ s *pour le nouveau modèle*
- $tr_{5\%} = 8{,}5$ s *pour l'approximation en échelon pur*

$$\boxed{\frac{8{,}5}{9{,}5} = 0{,}89}$$

L'erreur relative est de 11% ➡ *le modèle en échelon est donc pertinent*

FIN