

## Mathématiques - Programme de colles 4

DU 15 AU 19 OCTOBRE

### Primitives

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle, à valeurs réelles ou complexes.

Dérivée de  $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$  où  $f$  est continue. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Intégration par parties. Formule de changement de variable.

### Nombres complexes

c) Racines  $n$ -ièmes. Description des racines  $n$ -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique. Notation  $\mathcal{U}_n$  ou  $\mathbb{U}_n$ . Représentation géométrique.

d) Exponentielle complexe. Définition de  $e^z$  pour  $z$  complexe :  $e^z = e^{\Re(z)} e^{i\Im(z)}$ .

Exponentielle d'une somme.

Pour tous  $z$  et  $z'$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $e^z = e^{z'}$  si et seulement si  $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$ .

Résolution de l'équation  $e^z = a$ .

e) Interprétation géométrique des nombres complexes. Interprétation géométrique du module et d'un argument de  $\frac{c-b}{c-a}$ . Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.

Interprétation géométrique des applications  $z \mapsto az + b$ . Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.

### Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances. Dérivée, variations et graphe. Les fonctions puissances sont définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  et prolongées en 0 le cas échéant. Les fonctions puissances entières sont par ailleurs définies sur  $\mathbb{R}$ . Relations :

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta; \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

Croissances comparées des fonctions logarithme, puissance et exponentielles.

Fonctions sinus, cosinus, tangente.

### Question de cours (énoncés et démonstrations) :

- Intégrales de WALLIS : relations de récurrence et calculs.
- Les racines  $n$ -ièmes de l'unité sont deux à deux conjuguées.
- Racines  $n$ -ièmes d'un nombre complexe.
- Interprétation géométrique des applications  $z \mapsto az + b$ .
- Définition et dérivabilité de  $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ .
- Toute étude de fonction usuelle (log et exp en base  $a$ , puissances), avec branches infinies.
- Toute propriété des fonctions logarithmes, exponentielles, puissances.

### Savoir-faire :

- Exercices de géométrie plane utilisant les complexes.
- Tout exercice sur les complexes
- Utilisation des fonctions usuelles et de leurs propriétés.
- Manipulation d'expressions faisant intervenir des puissances, en revenant à la définition.