

Mathématiques - Programme de colles 30

DU 10 AU 14 JUIN

Espaces euclidiens

a) Produit scalaire

Produit scalaire $\varphi : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ sur un \mathbb{R} -espace vectoriel. Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ ; norme euclidienne, distance associée, inégalité triangulaire. Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Familles orthogonales, familles orthonormales ; relation de Pythagore. Relations entre produit scalaire et norme. Identité de polarisation. Définition d'un espace euclidien.

b) Orthogonalité

Existence de bases orthonormales : procédé d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale.

L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F est un supplémentaire de ce sous-espace vectoriel, appelé supplémentaire orthogonal de F , et noté F^\perp . Distance à un sous-espace vectoriel. Toute forme linéaire f s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = \langle a, x \rangle$, où a est un vecteur.

Projecteurs orthogonaux. Expression de la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace muni d'une base orthonormale.

c) Automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien

Définition d'un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E (c'est-à-dire un automorphisme de E conservant le produit scalaire). Caractérisation à l'aide de la conservation de la norme.

Définition du groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$; symétries orthogonales, réflexions.

Matrice d'un automorphisme orthogonal. Définition des matrices orthogonales et du groupe $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Question de cours (énoncés et démonstrations) :

- Définitions et propriétés d'un produit scalaire et de la norme associée.
- Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, inégalité de MINKOWSKI. Cas d'égalité.
- Représentation matricielle d'un produit scalaire.
- Existence et unicité du produit scalaire rendant orthonormale une base donnée.
- Procédé d'orthogonalisation de SCHMIDT.
- Distance de x à un sous-espace vectoriel de E euclidien.
- Propriétés des endomorphismes orthogonaux, propriétés des matrices orthogonales.

Savoir-faire :

- Exercices autour du produit scalaire.
- Détermination d'une projection orthogonale.
- Exercices sur les endomorphismes orthogonaux. Détermination d'une symétrie orthogonale.