

Mathématiques - Programme de colles 3

DU 8 AU 12 OCTOBRE

Primitives

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle, à valeurs réelles ou complexes.

Dérivée de $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ où f est continue. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Intégration par parties. Formule de changement de variable.

Nombres complexes et trigonométrie

a) Nombres complexes. Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes.

Conjugaison, compatibilité avec les opérations.

Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.

Module. Interprétation géométrique de $|z - z'|$, cercles et disques.

Relation $|z|^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire.

Cercle trigonométrique. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme.

Formules de trigonométrie exigibles : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\cos a \cos b$, $\sin a \cos b$, $\sin a \sin b$.

Factorisation des expressions du type $\cos(p) + \cos(q)$. $\tan(a \pm b)$. Formules de l'arc moitié.

Formules d'Euler. Linéarisation. Formule de Moivre.

Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ avec $r > 0$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.

Factorisation de $1 \pm e^{it}$.

b) Équations du second degré. Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique. Somme et produit des racines.

c) Racines n -ièmes. Description des racines n -ièmes de l'unité. Notation $\mathcal{U}_n$ ou $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.

Question de cours (énoncés et démonstrations) :

- Définition de l'intégrale fonction de sa borne supérieure, propriété de dérivabilité (énoncé seulement), conséquences.
- Démonstration de toute formule de trigonométrie à partir des formules d'additions.
- Inégalité triangulaire pour les nombres complexes.
- Racines carrées d'un nombre complexe (méthode trigonométrique ou méthode algébrique).
- Racines n -ièmes de l'unité.
- Résolution des équations du second degré à coefficients complexes.

Savoir-faire :

- Calculs d'intégrales : utilisation de la formule d'intégration par parties et de la formule de changement de variable. Application à la recherche de primitives.
- Tout calcul lié à la quantité conjuguée. Utilisation de toutes les propriétés de la conjugaison. Calcul d'un module à l'aide de la formule : $|z|^2 = z\bar{z}$.
- Calculs sur les nombres complexes : forme trigonométrique, factorisation de $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$, calculs de sommes, linéarisation...
- Calculs de racines carrées par la méthode algébrique ou par la méthode trigonométrique, selon la situation.
- Racines 2è, 3è et 4è de l'unité à connaître parfaitement.
- Résolution d'équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$.