

Mathématiques - Programme de colles 27

DU 20 AU 24 MAI

Déterminants

a) Applications multilinéaires

Définition d'une application n -linéaire, applications n -linéaires symétriques, antisymétriques, alternées.

b) Déterminant de n vecteurs

Formes n -linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n . Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n . Caractérisation des bases. Application à l'expression de la solution d'un système de CRAMER.

c) Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

d) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Développement par rapport à une ligne ou une colonne ; cofacteurs.

Relation : $A \times {}^t\text{Com}(A) = {}^t\text{Com}(A) \times A = (\det A) \cdot I_n$, où $\text{Com}(A)$ désigne la matrice des cofacteurs de A . Expression de l'inverse d'une matrice carrée.

Question de cours (énoncés et démonstrations) :

- Définition d'une application n -linéaire, symétrique, anti-symétrique, alternée. Une forme n -linéaire est antisymétrique ssi elle est alternée.
- Propriété/définition du déterminant dans la base \mathcal{B} (énoncé seulement).
- Définition, propriétés du déterminant d'un endomorphisme.
- Développement du déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- $A \times {}^t\text{Com}(A) = {}^t\text{Com}(A) \times A = (\det A) \cdot I_n$
- Système et formules de CRAMER.
- Déterminants de VAN DER MONDE

Savoir-faire :

- Caractériser le fait qu'une famille de vecteurs est une base, qu'un endomorphisme est un automorphisme, qu'une matrice est inversible via le déterminant.
- Utiliser les opérations sur les lignes et les colonnes ne modifiant pas le déterminant. S'en servir pour factoriser un déterminant.
- Développer un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- Établir une relation de récurrence pour calculer un déterminant.
- Le déterminant est une forme MULTI-linéaire alternée.