# Mathématiques - Programme de colles 26

du 13 au 17 mai

## Espaces de probabilités finis

a) Expérience aléatoire et univers

L'ensemble des issues (ou résultats possibles ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers. On se limite au cas où cet univers est fini.

Événement, événement élémentaire (singleton), événement contraire, événement « $A$ et $B$ », événement « $A$ ou $B$ », événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.

b) Espaces de probabilités finis

Une probabilité sur un univers fini $\Omega$ est une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ telle que $\mathbb{P}(\Omega)=1$ et, pour toutes parties disjointes $A$ et $B$, $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$. Détermination d'une probabilité par les images des singletons. Propriétés des probabilités : probabilité de la réunion de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance. Probabilité de la réunion de $n$ événements.

Probabilité uniforme.

c) Probabilités conditionnelles

Si $\mathbb{P}(B)>0$, la probabilité conditionnelle de $A$ sachant $B$ est définie par : $\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}_B(A)=\dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

L'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité.

Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales.

Formules de Bayes :

1. Si $A$ et $B$ sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A)>0$ et $\mathbb{P}(B)>0$, alors
$$\mathbb{P}(A\,|\,B)=\frac{\mathbb{P}(B\,|\,A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$
2. Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si $B$ est un événement de probabilité non nulle, alors
$$\mathbb{P}(A_j\,|\,B)=\frac{\mathbb{P}(B\,|\,A_j)\;\mathbb{P}(A_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B\,|\,A_i)\;\mathbb{P}(A_i)}.$$

d) Événements indépendants

Couple d'événements indépendants. Si $\mathbb{P}(B)>0$, l'indépendance de $A$ et $B$ s'écrit $\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A)$.

Famille finie d'événements mutuellement indépendants. L'indépendance deux à deux des événements $A_1,\dots,A_n$ n'implique pas l'indépendance mutuelle si $n\geqslant 3$.

## Groupe symétrique

Définition du groupe $\mathcal{S}_n$ (ou $\mathfrak{S}_n$) des permutations de $[\![1,n]\!]$ ; transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions. Signature $\varepsilon(\sigma)$ d'une permutation $\sigma$, signature d'une transposition. L'application signature est un homomorphisme de groupes de $\mathcal{S}_n$ dans $\{-1,1\}$ (admis) ; définition du sous-groupe alterné $\mathcal{A}_n$ (ou $\mathfrak{A}_n$).

**Questions de cours (énoncés et démonstrations) :**

- Caractérisation d'une probabilité par les images des singletons.
- Probabilité uniforme.
- La probabilité conditionnelle sachant $A$ est une mesure de probabilité.
- Formule des probabilités composées.
- Formule des probabilités totales.
- Formule de Bayes.
- Définition de l'indépendance de deux événements, d'une suite d'événements.
- Description de $\mathcal{S}_3$. $\mathcal{S}_n$ n'est pas abélien si $n \geq 3$.
- L'ensemble des transpositions engendre $\mathcal{S}_n$.
- Définition et propriétés de la signature.

**Savoir-faire :** Exercices de probabilité.

- Décrire un espace de probabilité rendant compte de l'expérience étudiée.
- Calculer la probabilité d'un événement dans le cadre d'une probabilité uniforme à l'aide de dénombrements.
- Utiliser la formule des probabilités composées et la formule des probabilités totales pour calculer une probabilité connaissant des probabilités conditionnelles.
- Utiliser la formule de Bayes pour renverser le conditionnement.
- Calculs sur les permutations.