Mathématiques - Programme de colles 25

du 6 au 11 mai

Dénombrements

a) Cardinal d'un ensemble fini

Cardinal d'un ensemble fini, cardinal d'une partie finie, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective ssi elle est injective ssi elle est surjective. Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis. Cardinal de la réunion de deux ensembles. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

b) p-uplets et combinaisons

Nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n. Nombre de parties à p éléments d'un ensemble de cardinal n.

Propriétés des coefficients binomiaux.

Espaces de probabilités finis

a) Expérience aléatoire et univers

L'ensemble des issues (ou résultats possibles ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers. On se limite au cas où cet univers est fini.

Événement, événement élémentaire (singleton), événement contraire, événement « A et B », événement « A ou B », événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.

b) Espaces de probabilités finis

Une probabilité sur un univers fini Ω est une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ telle que $\mathbb{P}(\Omega)=1$ et, pour toutes parties disjointes A et B, $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$. Détermination d'une probabilité par les images des singletons. Propriétés des probabilités : probabilité de la réunion de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance. Probabilité de la réunion de n événements.

Probabilité uniforme.

c) Probabilités conditionnelles

Si $\mathbb{P}(B)>0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par : $\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}_B(A)=\dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

L'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité.

Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales.

Formules de Bayes :

1. Si A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A)>0$ et $\mathbb{P}(B)>0$, alors
$$\mathbb{P}(A\,|\,B)=\frac{\mathbb{P}(B\,|\,A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$
2. Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle, alors
$$\mathbb{P}(A_j\,|\,B)=\frac{\mathbb{P}(B\,|\,A_j)\;\mathbb{P}(A_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B\,|\,A_i)\;\mathbb{P}(A_i)}.$$

d) Événements indépendants
Couple d'événements indépendants. Si $\mathbb{P}(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.
Famille finie d'événements mutuellement indépendants. L'indépendance deux à deux des événements $A_1, \ldots, A_n$ n'implique pas l'indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.

Question de cours (énoncés et démonstrations) :

- Cardinal d'un ensemble fini E, cardinal d'une partie de E , cas d'égalité.
- Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective ssi elle est injective ssi elle est surjective.
- Propriétés des cardinaux : produit cartésien, réunion de deux ensembles.
- Lemme des bergers.
- Définition d'un espace probabilisable, d'une mesure de probabilité, d'un espace de probabilités.
- Propriétés des mesures de probabilités.
- Caractérisation d'une probabilité par les images des singletons.

Savoir-faire :

- Dénombrements. Savoir justifier le calcul d'un cardinal.
- Calculer la probabilité d'un événement dans le cadre d'une probabilité uniforme à l'aide de dénombrements.
- Utiliser la formule des probabilités composées et la formule des probabilités totales pour calculer une probabilité connaissant des probabilités conditionnelles.
- Utiliser la formule de Bayes pour renverser le conditionnement.