

## Mathématiques - Programme de colles 20

DU 18 AU 22 MARS

**Algèbre linéaire** Voir les programmes précédents.

Symétries, projections. Définition, linéarité. Propriétés.

Théorème du rang

Étant donnée une application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$ ,  $f$  induit un isomorphisme de tout supplémentaire de  $\ker f$  sur  $\operatorname{Im} f$ ; en particulier,  $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$ .

### Fractions rationnelles

a) Corps  $\mathbb{K}(X)$  des fractions rationnelles, degré d'une fraction rationnelle. Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle. Zéros et pôles d'une fraction rationnelle; ordre de multiplicité.

b) Étude locale d'une fraction rationnelle

Théorème de décomposition en éléments simples de  $F = P/Q$  lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $Q$  est scindé. Lorsque  $a$  est un pôle simple de  $F$ , expressions de la partie polaire relative à ce pôle.

### Questions de cours (énoncés et démonstrations) :

- Existence d'un sous-espace supplémentaire.
- Si  $E = F \oplus G$ , définition de la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  et de la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ . Propriétés.
- Théorème du rang.
- Toute fraction rationnelle non nulle peut se mettre de manière unique sous forme irréductible.
- Degré d'une fraction rationnelle : définition et propriétés.
- Théorème de décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  (énoncé seulement).

### Savoir-faire :

- Tout exercice d'algèbre linéaire portant sur les programmes précédents. Exercices avec projections et symétries. Utilisation du théorème du rang.
- Exercices sur les fractions rationnelles.