

## Mathématiques - Programme de colles 11

DU 17 AU 21 DÉCEMBRE

### Structures algébriques usuelles

Définition d'une loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre. Définition des éléments symétrisables pour une loi associative admettant un élément neutre.

Définition d'un groupe, d'un sous-groupe, d'un homomorphisme de groupes, d'un isomorphisme de groupes. Noyau et image d'un homomorphisme de groupes.

Groupe additif  $\mathbb{Z}$  des nombres entiers, groupe  $\mathbb{U}$  des nombres complexes de module 1, sous-groupe des racines  $n$ ème de l'unité.

Définition d'un anneau. Diviseurs de zéro, anneau intègre. Définition d'un corps.

Anneau  $\mathbb{Z}$  des nombres entiers, corps  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels. Anneau des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Formule du binôme. Si  $x$  et  $y$  commutent, on a la relation :

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k.$$

### Questions de cours (énoncés et démonstrations) :

- Axiomes de la structure de groupe, d'anneau, de corps.
- Définition de sous-groupe, critères de sous-groupe.
- Intersection de sous-groupes, sous-groupe engendré par une partie.
- Homomorphismes, isomorphismes de groupes, d'anneaux, de corps.
- Image et image réciproque d'un groupe par un homomorphisme de groupes.
- Un homomorphisme de groupes est injectif ssi son noyau est réduit à  $\{e\}$ .
- Un homomorphisme de corps est injectif.

### Savoir-faire :

- Connaître les groupes d'ordre 1, 2, 3, 4.
- Exercices sur les groupes.
- Exercices sur les structures algébriques, notamment savoir utiliser la formule du binôme (et autres relations classiques) **dans un anneau**.