

Mathématiques - Programme de colles 11

DU 17 AU 21 DÉCEMBRE

Structures algébriques usuelles

Définition d'une loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre. Définition des éléments symétrisables pour une loi associative admettant un élément neutre.

Définition d'un groupe, d'un sous-groupe, d'un homomorphisme de groupes, d'un isomorphisme de groupes. Noyau et image d'un homomorphisme de groupes.

Groupe additif \mathbb{Z} des nombres entiers, groupe \mathbb{U} des nombres complexes de module 1, sous-groupe des racines n ème de l'unité.

Définition d'un anneau. Diviseurs de zéro, anneau intègre. Définition d'un corps.

Anneau \mathbb{Z} des nombres entiers, corps \mathbb{Q} des nombres rationnels. Anneau des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Formule du binôme. Si x et y commutent, on a la relation :

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k.$$

Questions de cours (énoncés et démonstrations) :

- Axiomes de la structure de groupe, d'anneau, de corps.
- Définition de sous-groupe, critères de sous-groupe.
- Intersection de sous-groupes, sous-groupe engendré par une partie.
- Homomorphismes, isomorphismes de groupes, d'anneaux, de corps.
- Image et image réciproque d'un groupe par un homomorphisme de groupes.
- Un homomorphisme de groupes est injectif ssi son noyau est réduit à $\{e\}$.
- Un homomorphisme de corps est injectif.

Savoir-faire :

- Connaître les groupes d'ordre 1, 2, 3, 4.
- Exercices sur les groupes.
- Exercices sur les structures algébriques, notamment savoir utiliser la formule du binôme (et autres relations classiques) **dans un anneau.**