

## Mathématiques - Programme de colles 10

DU 10 AU 14 DÉCEMBRE

### Suites réelles

#### b) Limite d'une suite

Limite d'une suite, convergence et divergence. Lorsque  $a \in \mathbb{R}$ , la relation  $u_n \rightarrow a$  équivaut à  $u_n - a \rightarrow 0$ .

Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Toute suite convergente est bornée. Toute suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel strictement positif est minorée, à partir d'un certain rang, par un nombre réel strictement positif.

Produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0. Opérations algébriques sur les limites ; compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

Suites extraites d'une suite. Toute suite extraite d'une suite convergeant vers  $a$  converge vers  $a$ .

#### c) Relations de comparaison

Étant donnée une suite  $(\alpha_n)_n$  de nombres réels non nuls, définition d'une suite  $(u_n)_n$  de nombres réels dominée par  $(\alpha_n)_n$ , négligeable devant  $(\alpha_n)_n$ . Notations  $u_n = O(\alpha_n)$ ,  $u_n = o(\alpha_n)$ . Définition de l'équivalence de deux suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  de nombres réels non nuls. Notation  $u_n \sim v_n$ . Équivalent d'un produit, d'un quotient.

Suites géométriques. Comparaison des suites de référence :  $a^n$ ,  $n^\alpha$ ,  $(\ln n)^\beta$ ,  $n!$ ,  $n^n$

#### d) Théorèmes d'existence de limites

Toute suite croissante majorée  $(u_n)_n$  converge, et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_n u_n$ . Extension au cas d'une suite croissante non majorée.

Suites adjacentes. Théorème des segments emboîtés.

Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS : de toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une suite convergente.

#### e) Brève extension aux suites complexes

Suites à valeurs complexes ; parties réelle et imaginaire d'une suite ; conjugaison. Suites bornées. Limite d'une suite à valeurs complexes.

Toute suite convergente est bornée.

### Structures algébriques usuelles

Définition d'une loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre. Définition des éléments symétrisables pour une loi associative admettant un élément neutre.

Définition d'un groupe, d'un sous-groupe.

Groupe additif  $\mathbb{Z}$  des nombres entiers, groupe  $\mathbb{U}$  des nombres complexes de module 1, sous-groupe des racines  $n$ ème de l'unité.

### Questions de cours (énoncés et démonstrations) :

- Théorème des suites monotones.
- Théorème des suites adjacentes.
- Existence de la constante d'EULER.
- Théorème des segments emboîtés.
- Propriétés des suites extraites.
- Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS (réservé aux *happy few*).
- Axiomes de la structure de groupe.
- Définition de sous-groupe, critères de sous-groupe.

### Savoir-faire :

- Savoir mettre en oeuvre une comparaison série-intégrale, comme dans le cas de la série harmonique.

- étude d'une suite : signe éventuel, monotonie éventuelle, utilisation des théorèmes de convergence, majorations, minoration...
- Calculs d'équivalents, manipulations de  $\sim$ ,  $O$ ,  $o$ .
- Savoir faire une comparaison avec une suite géométrique.
- Premiers exercices sur les groupes.