

Mathématiques - Programme de colles 6

DU 13 AU 17 NOVEMBRE

Équations différentielles linéaires

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

$$\forall x \in I, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$$

où a, b, c sont des scalaires et d est une application continue à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Recherche d'une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $t \mapsto e^{\alpha t} P(t)$, où $\alpha \in \mathbb{C}$ et P polynôme à coefficients complexes.

Principe de superposition.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy (admis).

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

a) Éléments de logique

Implication, contraposition, équivalence. Négation d'une proposition.

b) Ensembles

Ensemble, appartenance, inclusion. Sous-ensemble (ou partie). Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence symétrique, passage au complémentaire. Produit cartésien

Ensemble des parties d'un ensemble : notation $\mathcal{P}(E)$.

c) Applications et relations

Graphe de E vers F . Application d'un ensemble E dans (vers) un ensemble F . (Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application.)

Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble : notation $\mathbf{1}_A$.

Restriction et prolongement. Image directe. Image réciproque : Notation $f^{-1} \langle B \rangle$.

Injection, surjection. Bijection, réciproque.

Quantificateurs.

Questions de cours (énoncés et démonstrations) :

- Résolution de $ay'' + by' + cy = 0$: obtention des solutions complexes.
- Recherche d'une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ où d est de type polynôme ou « exponentielle \times polynôme ».
- Définitions de base sur les ensembles et les applications.
- Formulations diverses avec quantificateurs ($A \subset B$; $y \in f(A)$; $y \notin f(A)$; $x \in f^{-1} \langle B \rangle$; f est injective, f est surjective...)

Savoir-faire :

- Résolutions d'équations différentielles linéaires (1er et 2è ordre).
- Démonstrations soignées de propriétés portant sur les ensembles et les applications.
- Savoir démontrer l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité d'une application donnée.
- Savoir démontrer l'inclusion d'un ensemble dans un autre, l'égalité de deux ensembles.