

**Mathématiques - Programme de colles 4**  
DU 16 AU 20 OCTOBRE

**Nombres complexes**

d) Exponentielle complexe. Définition de  $e^z$  pour  $z$  complexe :  $e^z = e^{\Re(z)} e^{i\Im(z)}$ .

Exponentielle d'une somme.

Pour tous  $z$  et  $z'$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $\exp(z) = \exp(z')$  si et seulement si  $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$ .

Résolution de l'équation  $\exp(z) = a$ .

e) Interprétation géométrique des nombres complexes. Interprétation géométrique du module et d'un argument de  $\frac{c-b}{c-a}$ . Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.

Interprétation géométrique des applications  $z \mapsto az + b$ . Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.

**Fonctions usuelles**

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances. Dérivée, variations et graphe. Les fonctions puissances sont définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  et prolongées en 0 le cas échéant. Les fonctions puissances entières sont par ailleurs définies sur  $\mathbb{R}$ . Relations :

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta; \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

Croissances comparées des fonctions logarithme, puissance et exponentielles.

Fonctions sinus, cosinus, tangente.

Fonctions hyperboliques. Notations sh, ch, th.

**Question de cours (énoncés et démonstrations) :**

- Démonstration de toute formule de trigonométrie à partir des formules d'additions.
- Définition et dérivabilité de  $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ .
- Toute étude de fonction usuelle (log et exp en base  $a$ , puissances, fonctions hyperboliques), avec branches infinies.
- Toute propriété des fonctions logarithmes, exponentielles, puissances, hyperboliques.
- Théorème des croissances comparées (quatre limites dans l'énoncé).
- Parties paire et impaire d'une application définie sur  $\mathbb{R}$  (propriété et démonstration).

**Savoir-faire :**

- Utilisation des fonctions usuelles et de leurs propriétés.
- Manipulation d'expressions faisant intervenir des puissances, en revenant à la définition.
- Utilisation du théorème des croissances comparées.
- Exercices de géométrie plane utilisant les complexes.
- Tout exercice sur les complexes