Mathématiques - Programme de colles 27

DU 28 MAI AU 1ER JUIN

Intégrale de Riemann

a) Fonctions en escalier et fonctions continues par morceaux

Définition d'une fonction φ en escalier sur $[a,b]$, d'une subdivision de $[a,b]$ associée à φ. Ensemble des fonctions en escalier sur un segment. Ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment ; opérations.

Approximation des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier : étant donnée une fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions φ et ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que : $\varphi \leq f \leq \psi$ et $0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$.

b) Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Linéarité. Positivité. Croissance. Relation de CHASLES.

c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Notations : $\int_I f(x)dx$, $\int_{[a,b]} f(x)dx$. Définition de $\int_a^b f(t)dt$.

Linéarité. Croissance ; inégalité $\left|\int_I f(x)dx\right| \leq \int_I |f(x)|\,dx$. Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration, relation de CHASLES. Valeur moyenne d'une fonction. Inégalité :

$$\left|\int_{[a,b]} f(x)g(x)dx\right| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_{[a,b]} |g(x)|\,dx.$$

Une fonction f continue et à valeurs positives sur un segment est nulle si et seulement si son intégrale est nulle. Approximation de l'intégrale d'une fonction f continue sur $[a,b]$ par les sommes de RIEMANN : $S(f,\sigma,(\lambda_i)_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\lambda_i)$, où $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ est une subdivision de $[a,b]$ et $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ est une suite de réels telle que : $\forall i,\ 1 \leq i \leq n \Rightarrow \lambda_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

d) Intégrale fonction de sa borne supérieure

Propriétés de l'intégrale fonction de sa borne supérieure. Formule d'intégration par parties. Applications : formule de TAYLOR avec reste intégral ; intégrales de WALLIS. Formule de changement de variable. Utilisation du changement de variable pour exploiter la périodicité, les symétries.

Primitives des fonctions usuelles. Calcul de primitives.

e) Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Définitions. Primitive d'exponentielle complexe, primitive de $x \mapsto (x-z)^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}^*, z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$), inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs complexes. Formule de TAYLOR avec reste intégral.

Questions de cours (énoncés et démonstrations) :

- Conséquences des propriétés de l'intégrale fonction de sa borne supérieure : existence de primitives pour une fonction continue, lien entre intégrale et primitive pour une fonction continue.
- Formule d'intégration par parties, intégrales de WALLIS.
- Formule de TAYLOR avec reste intégral et inégalité de TAYLOR-LAGRANGE
- Formule de changement de variable, utilisation pour exploiter la périodicité, les symétries.
- Primitives usuelles à savoir retrouver.
- Fonctions à valeurs complexes : propriété de majoration du module d'une intégrale et inégalité des accroissements finis.

Savoir-faire :

Tout exercice d'intégration.