

## Mathématiques - Programme de colles 25

DU 14 AU 18 MAI

### Groupe symétrique

Définition du groupe  $\mathcal{S}_n$  (ou  $\mathfrak{S}_n$ ) des permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ; transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions. Signature  $\varepsilon(\sigma)$  d'une permutation  $\sigma$ , signature d'une transposition. L'application signature est un homomorphisme de groupes de  $\mathcal{S}_n$  dans  $\{-1, 1\}$  (admis); définition du sous-groupe alterné  $\mathcal{A}_n$  (ou  $\mathfrak{A}_n$ ).

### Déterminants

a) Applications multilinéaires

Définition d'une application  $n$ -linéaire, applications  $n$ -linéaires symétriques, antisymétriques, alternées.

b) Déterminant de  $n$  vecteurs

Formes  $n$ -linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension  $n$ . Déterminant de  $n$  vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension  $n$ . Caractérisation des bases. Application à l'expression de la solution d'un système de CRAMER.

c) Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes; caractérisation des automorphismes.

d) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Développement par rapport à une ligne ou une colonne; cofacteurs.

Relation :  $A \times {}^t\text{Com}(A) = {}^t\text{Com}(A) \times A = (\det A) \cdot I_n$ , où  $\text{Com}(A)$  désigne la matrice des cofacteurs de  $A$ . Expression de l'inverse d'une matrice carrée.

Application à la résolution de systèmes.

### Question de cours (énoncés et démonstrations) :

- $\mathcal{S}_n$  n'est pas abélien si  $n \geq 3$ .
- L'ensemble des transpositions engendre  $\mathcal{S}_n$ .
- Définition d'une application  $n$ -linéaire, symétrique, anti-symétrique, alternée. Une forme  $n$ -linéaire est antisymétrique ssi elle est alternée.
- Propriété/définition du déterminant dans la base  $\mathcal{B}$ .
- Définition, propriétés du déterminant d'un endomorphisme.
- Développement du déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- $A \times {}^t\text{Com}(A) = {}^t\text{Com}(A) \times A = (\det A) \cdot I_n$
- Système et formules de CRAMER.
- déterminant de VAN DER MONDE

### Savoir-faire :

- Caractériser le fait qu'une famille de vecteurs est une base, qu'un endomorphisme est un automorphisme, qu'une matrice est inversible via le déterminant.
- Utiliser les opérations sur les lignes et les colonnes ne modifiant pas le déterminant. S'en servir pour factoriser un déterminant.
- Développer un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- Établir des relations de récurrence pour calculer un déterminant.
- Le déterminant est une forme MULTI-linéaire alternée.