Mathématiques - Programme de colles 22

du 3 au 6 avril

Structure de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$

Programmes précédents et :

b) Opérations sur les matrices
Transposée d'une matrice. Addition, multiplication.
Matrices carrées symétriques, antisymétriques.
c) Opérations élémentaires sur les matrices
Opérations permises sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice. Interprétation des opérations élémentaires en termes de produits matriciels.
Application à l'inversion d'une matrice carrée par l'algorithme du pivot de Gauss.
d) Rang d'une matrice
Définition du rang d'une matrice (dimension de l'espace engendré par les vecteurs colonnes). Le rang d'une matrice est le rang de l'application linéaire associée.
Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si elle est de la forme PJ_rQ où P et Q sont des matrices carrées inversibles.
e) Matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ d'un espace vectoriel E ; effet d'un changement de bases sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire, sur la matrice d'un endomorphisme.
Application trace. Propriétés.
Exemples de calcul des puissances d'une matrice : utilisation d'un polynôme annulateur, utilisation de matrices nilpotentes. Quelques calculs (guidés) de valeurs et vecteurs propres.
f) Étude des endomorphismes vérifiant $(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = 0$: application aux projecteurs et aux symétries.

Question de cours (énoncés et démonstrations) :

- Toute matrice M de rang r s'écrit sous la forme PJ_rQ où P et Q sont des matrices carrées inversibles.
- Matrices équivalentes, matrices semblables, changement de bases.
- Définitions du rang d'une matrice et du rang d'une application linéaire. Lien entre le rang d'une matrice et le rang d'une application linéaire.
- Définition et propriétés de la trace.
- Étude des endomorphismes vérifiant $(f - a.Id_E) \circ (f - b.Id_E) = 0$ $(a \neq b)$.
- Définition et propriétés d'un projecteur de E, d'une symétrie de E.

Savoir-faire :

- changements de bases,
- calculs de puissances de matrices,
- tout exercice d'algèbre linéaire portant sur ce programme de colle et les précédents.