Mathématiques - Programme de colles 16

du 5 au 9 février

Polynômes

Voir programme précédent. Définition d'un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$; fonctions symétriques élémentaires des racines et relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé.

Dérivabilité

a) Dérivée en un point, fonction dérivée

Dérivabilité en un point : dérivée, dérivée à gauche, à droite. Extrema locaux des fonctions dérivables. Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée. Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques. Notations f', $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Pour $0 \leq k \leq +\infty$, ensemble $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Dérivée n-ième d'un produit (formule de Leibniz).

Brève extension aux fonctions à valeurs complexes.

b) Étude globale des fonctions dérivables

Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis :

- si $m \leq f' \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$,
- si $|f'| \leq M$, alors f est M-lipschitzienne.

Caractérisation des fonctions constantes, monotones et strictement monotones parmi les fonctions dérivables. Si f est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$ et si f' a une limite finie en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Brève extension au cas d'une limite infinie.

Question de cours (énoncés et démonstrations) :

- Définition d'un polynôme scindé. Fonctions symétriques élémentaires des racines. Relations coefficients/racines.
- Dérivée de $f+g$, $f \times g$, $f/g, f \circ g$.
- Théorème des fonctions réciproques.
- Propriété sur les extrema et théorème de Rolle.
- Théorème des accroissements finis et inégalité des AF.
- Théorème de la limite de la dérivée.

Savoir-faire :

- Exercices sur les coefficients et les racines d'un polynôme. Tout exercice sur les polynômes.
- Exercices sur la dérivabilité. Utilisation du théorème de Rolle, des AF.