

Mathématiques - Programme de colles 15

DU 29 JANVIER AU 2 FÉVRIER

Polynômes à une indéterminée sur un corps \mathbb{K}

a) Polynômes à une indéterminée sur un corps \mathbb{K}

Espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans \mathbb{K} ; opérations. Degré d'un polynôme (on convient que le degré de 0 est $-\infty$), coefficient dominant, polynôme unitaire (ou normalisé).

Degré d'un produit, d'une somme; les polynômes de degré inférieur ou égal à p constituent un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

Multiples et diviseurs d'un polynôme, polynômes associés. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$, algorithme de la division euclidienne.

b) Fonctions polynomiales

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Zéros (ou racines) d'un polynôme; ordre de multiplicité. Isomorphisme entre polynômes et fonctions polynomiales (si \mathbb{K} est infini). Algorithme de HÖRNER pour le calcul des valeurs d'une fonction polynomiale.

c) Définition du polynôme dérivé. Dérivation d'une combinaison linéaire, dérivée d'un produit. Dérivées successives, dérivée n -ième d'un produit (formule de LEIBNIZ). Formule de TAYLOR, application à la recherche de l'ordre de multiplicité d'un zéro.

d) Polynômes scindés

Définition d'un polynôme scindé sur \mathbb{K} ; relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé.

Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS (admis). Description des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$. Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} .

e) Divisibilité dans l'anneau $\mathbb{K}[X]$

Diviseurs communs à deux polynômes, polynômes premiers entre eux. PGCD de deux polynômes; algorithme d'EUCLIDE. PPCM de deux polynômes. Théorème de BÉZOUT. Théorèmes de GAUSS. Polynômes irréductibles. Existence et unicité de la décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles.

Questions de cours (énoncés et démonstrations) :

- Définition d'un polynôme et d'une fonction polynomiale.
- Produit de deux polynômes.
- Degré : définition, degré d'une somme, degré d'un produit.
- Une famille de polynômes tous non nuls et de degrés deux à deux distincts est libre.
- Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
- Polynômes associés : définition et caractérisation.
- Formule de LEIBNIZ.
- Formule de TAYLOR pour les polynômes.
- Multiplicité d'une racine : définition, caractérisation d'une racine de multiplicité α .
- Décomposition de GAUSS : sur \mathbb{K} , sur \mathbb{C} , sur \mathbb{R} (énoncés seulement).

Savoir-faire :

- Manipulations algébriques de polynômes (en particulier, utilisation des identités remarquables variables dans un anneau commutatif).
- Division euclidienne, arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$.
- Factorisation, raisonnements avec les racines.
- Décompositions en facteurs irréductibles sur \mathbb{C} et/ou sur \mathbb{R} .