

## Mathématiques - Programme de colles 15

DU 29 JANVIER AU 2 FÉVRIER

### Polynômes à une indéterminée sur un corps $\mathbb{K}$

a) Polynômes à une indéterminée sur un corps  $\mathbb{K}$

Espace vectoriel  $\mathbb{K}[X]$  des polynômes à une indéterminée à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ; opérations. Degré d'un polynôme (on convient que le degré de 0 est  $-\infty$ ), coefficient dominant, polynôme unitaire (ou normalisé).

Degré d'un produit, d'une somme; les polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$  constituent un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$ . L'anneau  $\mathbb{K}[X]$  est intègre.

Multiples et diviseurs d'un polynôme, polynômes associés. Division euclidienne dans  $\mathbb{K}[X]$ , algorithme de la division euclidienne.

b) Fonctions polynomiales

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Zéros (ou racines) d'un polynôme; ordre de multiplicité. Isomorphisme entre polynômes et fonctions polynomiales (si  $\mathbb{K}$  est infini). Algorithme de HÖRNER pour le calcul des valeurs d'une fonction polynomiale.

c) Définition du polynôme dérivé. Dérivation d'une combinaison linéaire, dérivée d'un produit. Dérivées successives, dérivée  $n$ -ième d'un produit (formule de LEIBNIZ). Formule de TAYLOR, application à la recherche de l'ordre de multiplicité d'un zéro.

d) Polynômes scindés

Définition d'un polynôme scindé sur  $\mathbb{K}$ ; relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé.

Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS (admis). Description des polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  et de  $\mathbb{R}[X]$ . Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles sur  $\mathbb{C}$  et sur  $\mathbb{R}$ .

e) Divisibilité dans l'anneau  $\mathbb{K}[X]$

Diviseurs communs à deux polynômes, polynômes premiers entre eux. PGCD de deux polynômes; algorithme d'EUCLIDE. PPCM de deux polynômes. Théorème de BÉZOUT. Théorèmes de GAUSS. Polynômes irréductibles. Existence et unicité de la décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles.

### Questions de cours (énoncés et démonstrations) :

- Définition d'un polynôme et d'une fonction polynomiale.
- Produit de deux polynômes.
- Degré : définition, degré d'une somme, degré d'un produit.
- Une famille de polynômes tous non nuls et de degrés deux à deux distincts est libre.
- Division euclidienne dans  $\mathbb{K}[X]$ .
- Polynômes associés : définition et caractérisation.
- Formule de LEIBNIZ.
- Formule de TAYLOR pour les polynômes.
- Multiplicité d'une racine : définition, caractérisation d'une racine de multiplicité  $\alpha$ .
- Décomposition de GAUSS : sur  $\mathbb{K}$ , sur  $\mathbb{C}$ , sur  $\mathbb{R}$  (énoncés seulement).

**Savoir-faire :**

- Manipulations algébriques de polynômes (en particulier, utilisation des identités remarquables variables dans un anneau commutatif).
- Division euclidienne, arithmétique dans  $\mathbb{K}[X]$ .
- Factorisation, raisonnements avec les racines.
- Décompositions en facteurs irréductibles sur  $\mathbb{C}$  et/ou sur  $\mathbb{R}$ .