**Mathématiques - Programme de colles 14**

DU 22 AU 26 JANVIER

**Fonctions numériques**

a) Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.
Espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, Relation d'ordre.
Fonctions majorées, minorées. Fonctions bornées.
Définition de la borne supérieure (inférieure) d'une fonction.
Fonctions monotones, strictement monotones ; composition. Fonctions paires, impaires. Fonctions $T$-périodiques. Définition des fonctions lipschitziennes.
b) Étude locale d'une fonction : Limite d'une fonction $f$ en un point $a$, continuité en un point.
Lorsque $b \in \mathbb{R}$, la relation $f(x) \to b$ équivaut à la relation $f(x) - b \to 0$. Lorsque $a \in \mathbb{R}$, la relation $f(x) \to b$ lorsque $x \to a$ équivaut à la relation $f(a+h) \to b$ lorsque $h \to 0$.
Limite à gauche, limite à droite. Continuité à gauche, continuité à droite.
Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.
Toute fonction admettant une limite strictement positive en un point est minorée, au voisinage de ce point, par un nombre réel strictement positif. Produit d'une fonction bornée au voisinage de $a$ par une fonction tendant vers 0 en $a$. Opérations algébriques sur les limites ; compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.
Limite d'une fonction composée. Image d'une suite convergente. Existence d'une limite d'une fonction monotone.
c) Relations de comparaison
Étant donnés un point $a$ (appartenant à $I$ ou extrémité de $I$) et une fonction $\varphi$ à valeurs réelles et ne s'annulant pas sur $I$ privé de $a$, définition d'une fonction $f$ à valeurs réelles, dominée par $\varphi$ (négligeable devant $\varphi$) au voisinage de $a$.
Définition de l'équivalence au voisinage de $a$ de deux fonctions $f$ et $g$ à valeurs réelles ne s'annulant pas sur $I$ privé de $a$. Équivalent d'un produit, d'un quotient. Application à la comparaison des fonctions usuelles.
c) Fonctions continues
Définition d'une fonction continue en un point $x_0$. Prolongement par continuité en une extrémité de $I$.
Espace vectoriel $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $I$ et à valeurs réelles. Composée de deux fonctions continues. Image d'un intervalle par une fonction continue. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un segment par une fonction continue.
Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.
Définition de la continuité uniforme. Continuité uniforme d'une fonction continue sur un segment (admis).

Exemples d'équations fonctionnelles.

**Question de cours (énoncés et démonstrations) :**

- Lien entre injectivité et stricte monotonie pour une application continue.
- Lien entre surjectivité et continuité pour une fonction strictement monotone.
- Toute opération sur les fonctions admettant une limite. Composition de limites.
- Toute opération sur les fonctions continues. Composée de deux fonctions continues.
- Définitions usuelles $(o, O, \sim)$.
- Résolution de l'équation fonctionnelle : $f$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

**Savoir-faire :**

- Savoir démontrer qu'une application est bijective dans la pratique (plusieurs méthodes : résolution de l'équation $f(x) = y$..., détermination d'une fonction réciproque, montrer que $f$ est injective et surjective, utilisation du théorème de la bijection).
- Bien distinguer le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection.
- Utilisation de la notion de limite (utiliser les propriétés usuelles des limites mais savoir revenir à la définition si besoin).
- Utilisation de la notion de continuité (définition, opérations sur les fonctions continues, théorèmes sur les fonctions continues).
- Calculs d'équivalents.