

Mathématiques - Programme de colles 13

DU 15 AU 19 JANVIER

Fonctions numériques

a) Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

Espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, Relation d'ordre.

Fonctions majorées, minorées. Fonctions bornées.

Définition de la borne supérieure (inférieure) d'une fonction.

Fonctions monotones, strictement monotones; composition. Fonctions paires, impaires. Fonctions T -périodiques. Définition des fonctions lipschitziennes.

b) Étude locale d'une fonction : Limite d'une fonction f en un point a , continuité en un point.

Lorsque $b \in \mathbb{R}$, la relation $f(x) \rightarrow b$ équivaut à la relation $f(x) - b \rightarrow 0$. Lorsque $a \in \mathbb{R}$, la relation $f(x) \rightarrow b$ lorsque $x \rightarrow a$ équivaut à la relation $f(a + h) \rightarrow b$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Limite à gauche, limite à droite. Continuité à gauche, continuité à droite.

Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.

Toute fonction admettant une limite strictement positive en un point est minorée, au voisinage de ce point, par un nombre réel strictement positif. Produit d'une fonction bornée au voisinage de a par une fonction tendant vers 0 en a . Opérations algébriques sur les limites; compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

Limite d'une fonction composée. Image d'une suite convergente. Existence d'une limite d'une fonction monotone.

c) Fonctions continues

Définition d'une fonction continue en un point x_0 . Prolongement par continuité en une extrémité de I . Image d'un intervalle par une fonction continue. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un segment par une fonction continue.

Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

Question de cours (énoncés et démonstrations) :

- Définitions usuelles (parité, monotonie, fonction lipschitzienne, limites, continuité...)
- Une application monotone admet une limite à droite et à gauche en tout point.
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Théorème des valeurs intermédiaires.
- L'image d'un segment par une application continue est un segment.

Savoir-faire :

- Savoir démontrer qu'une application est bijective dans la pratique (plusieurs méthodes : résolution de l'équation $f(x) = y...$, détermination d'une fonction réciproque, montrer que f est injective et surjective, utilisation du théorème de la bijection).
- Bien distinguer le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection.
- Utilisation de la notion de limite (utiliser les propriétés usuelles des limites mais savoir revenir à la définition si besoin).
- Utilisation de la notion de continuité (définition, opérations sur les fonctions continues, théorèmes sur les fonctions continues).