Mathématiques - Programme de colles 12

du 8 au 12 janvier

Dénombrements

a) Cardinal d'un ensemble fini

Cardinal d'un ensemble fini, cardinal d'une partie finie, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective ssi elle est injective ssi elle est surjective. Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis. Cardinal de la réunion de deux ensembles. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

b) p-uplets et combinaisons

Nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n. Nombre de parties à p éléments d'un ensemble de cardinal n.

Propriétés des coefficients binomiaux.

Arithmétique

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.
PGCD de deux entiers naturels non tous nuls. Algorithme d'Euclide. PPCM.
Couple d'entiers premiers entre eux. Théorème de Bézout. Théorèmes de Gauss.
Nombres premiers. L'ensemble des nombres premiers est infini. Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul et différent de 1 en produit de nombres premiers.
Relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$. Opérations sur les congruences : somme, produit.

Résolution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation $ax + by = c$.

Question de cours (énoncés et démonstrations) :

- Lemme des bergers
- Formule de Van Der Monde.
- Division euclidienne dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$.
- Tout entier naturel non nul et différent de 1 admet au moins un diviseur premier ; l'ensemble des nombres premiers est infini.
- Identité de Bézout, théorèmes de Gauss.
- Théorème de décomposition en facteurs premiers.
- Résolution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation $ax + by = c$.

Savoir-faire :

- Dénombrements. Savoir justifier le calcul d'un cardinal.
- Tout calcul faisant intervenir des coefficients binomiaux.
- Arithmétique dans $\mathbb{Z}$. Congruences.