

## Mathématiques - Programme de colles 26

DU 15 AU 19 MAI

### Déterminants

a) Applications multilinéaires

Définition d'une application  $n$ -linéaire, applications  $n$ -linéaires symétriques, antisymétriques, alternées.

b) Déterminant de  $n$  vecteurs

Formes  $n$ -linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension  $n$ . Déterminant de  $n$  vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension  $n$ . Caractérisation des bases. Application à l'expression de la solution d'un système de CRAMER.

c) Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

d) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Développement par rapport à une ligne ou une colonne ; cofacteurs.

Relation :  $A \times {}^t\text{Com}(A) = {}^t\text{Com}(A) \times A = (\det A) \cdot I_n$ , où  $\text{Com}(A)$  désigne la matrice des cofacteurs de  $A$ . Expression de l'inverse d'une matrice carrée.

Application à la résolution de systèmes.

### Question de cours (énoncés et démonstrations) :

- Une famille de  $n$  vecteurs est libre ssi son déterminant dans une base donnée est non nul.
- Développement du déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- $A \times {}^t\text{Com}(A) = {}^t\text{Com}(A) \times A = (\det A) \cdot I_n$
- Système et formules de CRAMER.
- Déterminant de VAN DER MONDE.

### Savoir-faire :

- Caractériser le fait qu'une famille de vecteurs est une base, qu'un endomorphisme est un automorphisme, qu'une matrice est inversible via le déterminant.
- Utiliser les opérations sur les lignes et les colonnes ne modifiant pas le déterminant.
- Développer un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- Établir des relations de récurrence pour calculer un déterminant.
- Le déterminant est une forme MULTI-linéaire alternée.
- Résolution de systèmes linéaires à l'aide de déterminants.
- **Tout exercice de probabilité.**
- **Calcul d'intégrales.**