Mathématiques - Programme de colles 25

du 9 au 12 mai

Groupe symétrique

Définition du groupe $\mathcal{S}_n$ (ou $\mathfrak{S}_n$) des permutations de $[\![1,n]\!]$; transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions. Signature $\varepsilon(\sigma)$ d'une permutation σ, signature d'une transposition. L'application signature est un homomorphisme de groupes de $\mathcal{S}_n$ dans $\{-1,1\}$ (admis) ; définition du sous-groupe alterné $\mathcal{A}_n$ (ou $\mathfrak{A}_n$).

Déterminants

a) Applications multilinéaires
Définition d'une application n-linéaire, applications n-linéaires symétriques, antisymétriques, alternées.

b) Déterminant de n vecteurs
Formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n. Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n. Caractérisation des bases. Application à l'expression de la solution d'un système de Cramer.

c) Déterminant d'un endomorphisme
Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

d) Déterminant d'une matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Développement par rapport à une ligne ou une colonne ; cofacteurs.
Relation : $A \times {}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A) \times A = (\det A).\mathrm{I}_n$, où $\mathrm{Com}(A)$ désigne la matrice des cofacteurs de A. Expression de l'inverse d'une matrice carrée.

Application à la résolution de systèmes.

Question de cours (énoncés et démonstrations) :

- $\mathcal{S}_n$ n'est pas abélien si $n \geq 3$.
- L'ensemble des transpositions engendre $\mathcal{S}_n$.
- Définition et propriétés de la signature.
- Définition d'une application n-linéaire, symétrique, anti-symétrique, alternée. Une forme n-linéaire est antisymétrique ssi elle est alternée.
- Propriété/définition du déterminant dans la base $\mathcal{B}$.
- Définition, propriétés du déterminant d'un endomorphisme.

Savoir-faire :

- Calculs sur les permutations.
- Caractériser le fait qu'une famille de vecteurs est une base, qu'un endomorphisme est un automorphisme, qu'une matrice est inversible via le déterminant.
- Utiliser les opérations sur les lignes et les colonnes ne modifiant pas le déterminant.
- Développer un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- Établir des relations de récurrence pour calculer un déterminant.
- Le déterminant est une forme MULTI-linéaire alternée.