

Les tambours liquides

MARIA BRAZOVSKAIA • CATHERINE EVEN • PAWEŁ PIERANSKI

La mesure des fréquences de vibration de la peau d'un tambour en cristal liquide confirme que des formes différentes donnent parfois les mêmes fréquences : on ne peut pas entendre la forme d'un tambour !

Les bruits qui frappent, plus ou moins agréablement, nos oreilles résultent quelquefois de vibrations de cordes, le plus souvent de vibrations de plaques métalliques de formes variées. Les changements de ces vibrations se traduisent par des changements de sons, lesquels dénotent parfois le défaut des organes d'une machine : nous savons qu'une fêlure est diagnostiquée à l'oreille, et que l'on écoute si un moteur «tourne rond».

Depuis les travaux du physicien anglais Rayleigh, au XIX^e siècle, nous savons, pour quelques contours simples (triangle, cercle, carré), calculer le spectre de vibration d'une membrane, c'est-à-dire déterminer ses fréquences de vibration.

Les mathématiciens ont examiné le problème réciproque : pouvons-nous

«remonter à la source» et connaître la forme d'une surface à partir de son spectre de vibration? Cette question a été posée pour la première fois par M. Kac (mathématicien américain d'origine polonaise), en 1966, sous la forme suivante : «Can one hear the shape of a drum?» ou : «Peut-on, à partir du spectre de fréquences, déterminer la forme du tambour?»

Après un long cheminement, la réponse théorique à cette question a enfin été apportée en 1992 par les mathématiciens américains C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert. On peut la résumer de façon lapidaire : «Non.»

Nous verrons dans cet article comment l'analyse des vibrations d'un film de cristal liquide, très proche d'un tambour idéal, confirme l'analyse mathématique.

Les cristaux liquides

Les trois états habituels de la matière, solide, liquide et gazeux, sont connus de tous. Certaines substances présentent des états intermédiaires où les molécules s'arrangent en structures qui tiennent à la fois du liquide et du solide cristallin. Ces états ont été découverts à la fin du XIX^e siècle par le biologiste M. Reinitzer, puis baptisés «mésophases» par Georges Friedel en 1921.

Quelles propriétés spécifiques des molécules leur permettent-elles de former des mésophases? La réponse est que, souvent, les molécules ont une structure très compliquée, avec plusieurs parties attachées chimiquement. Par exemple, certaines comportent un «noyau» rigide et une «queue» flexible. Si ces deux parties étaient des molécules séparées, elles auraient des températures de transition solide-liquide différentes. Ainsi, pour la molécule composée des deux parties, il existe un intervalle de température où le noyau «veut» être dans l'état cristallin, et la queue dans l'état liquide. La compétition entre les deux conduit à la formation d'une mésophase dans une fourchette de températures.

Une autre dénomination des mésophases est «cristaux liquides». Adopté pour des raisons historiques, ce nom exprime également le caractère intermédiaire des mésophases. La dénomination «cristal liquide» est plus courante, de sorte que nous l'utiliserons par la suite, bien qu'elle puisse introduire des confusions : un cristal liquide n'a jamais l'aspect cristallin ; c'est plutôt un liquide très visqueux.

Nous nous intéressons plus particulièrement aux cristaux liquides dits smectiques, qui sont caractérisés par l'organisation des molécules en couches. Ainsi, dans ce type de méso-

Modes de vibration

CORDES

DISQUES

A l'équilibre, la corde et le disque sont en position horizontale. Leurs positions au cours des vibrations sont des «photographies» de la corde ou de la membrane à un instant donné. À chaque dessin correspond un «mode» de vibration possible pour la corde. Un «nœud» est un point qui reste immobile au cours du temps : les deux extrémités de la corde, tout comme le périmètre du disque, sont des nœuds, quel que soit le mode. Un mode est alors caractérisé par le nombre de nœuds qu'il comporte ou de lignes

nodales. On classe ainsi les différents modes d'une corde par nombre de nœuds croissants : le fondamental n'en comporte aucun, le premier harmonique en a un, le deuxième deux, etc. On a ainsi une infinité de modes possibles. Il en est de même des disques où les vibrations modifient les deux dimensions de la surface plane. Un mode de surface est caractérisé par deux nombres.

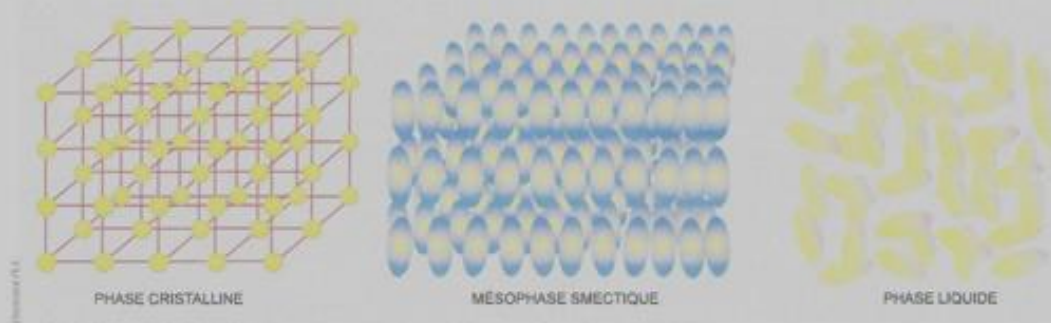
En pratique, quand une corde ou un disque vibrent, plusieurs modes se superposent.



1. MODES DE VIBRATION D'UN TAMBOUR. La poudre noire se rassemble sur les lignes nodales où l'amplitude de vibration est nulle. Le dispositif excitateur est constitué d'un bras touchant presque

la peau du tambour. Il fait vibrer un petit aimant situé sous la peau de ce tambour. De haut en bas et de gauche à droite, les modes sont (0,1), (0,2), (1,2), (2,1), (2,2) et (3,1).

Aryz Sait, Northern Illinois University



2. LA MESOPHASE SMECTIQUE a une structure intermédiaire entre le solide et le liquide.

phases, l'ordre cristallin est conservé au moins dans une direction.

Grâce à leur structure lamellaire, les cristaux liquides smectiques forment des films quand on les tend sur des cadres de forme arbitraire, les couches smectiques étant parallèles à la surface du film. Ces films sont analogues aux bulles de savon, à une différence près : une bulle a toujours deux couches de molécules de savon, avec de l'eau à l'intérieur, tandis que les films smectiques sont constitués uniquement des molécules du cristal liquide, et ils peuvent comporter un

nombre arbitraire de couches : les films smectiques sont beaucoup plus stables.

Les films smectiques sont connectés au cadre qui les supporte par l'intermédiaire d'un ménisque, qui est une succession de plages de plus en plus épaisses. La largeur du ménisque est en général négligeable par rapport à la taille du film lui-même.

Une fois tiré, le film ne fluctue pas tel un drapeau sous le vent, mais il reste plat comme la peau d'un tambour. Ce comportement indique la présence d'une certaine tension du film. Toutefois pour un film smectique, contrairement

aux cordes d'un instrument de musique, la tension existe de manière intrinsèque ; en revanche, la tension d'une corde peut être réglée, par exemple d'un tour de clef.

Les films smectiques : des membranes idéales

Un film smectique a une épaisseur comprise entre quelques couches moléculaires et quelques centaines de couches, soit au maximum quelques centaines de nanomètres ; cette grandeur est bien inférieure à sa dimension latérale, qui est de un centimètre environ. En conséquence, on peut négliger son épaisseur, c'est-à-dire le considérer comme un système bidimensionnel ; de plus, sa tension est uniforme.

Ces deux propriétés font du film smectique une membrane idéale, meilleure même qu'une peau de tambour tendue ; en effet, il est très difficile de tendre une peau de tambour de manière à ce que la tension soit parfaitement uniforme. Il est donc très commode d'utiliser un film smectique en tant que membrane vibrante.

Avant d'étudier les vibrations d'un film smectique, intéressons-nous tout d'abord au cas de la corde vibrante, qui constitue un système à une dimension. Sur le dessin de l'encadré page 58, nous avons représenté la position de la corde à l'équilibre (horizontale) et la position de la corde à un instant quelconque où elle vibre (on a ainsi photographié la corde pendant qu'elle vibrait).

Moyennant certaines approximations (amplitude de vibration suffisamment faible), on peut considérer que la trajectoire suivie par un point de la corde est verticale : le petit morceau de corde que l'on considère



3. COMPARAISON DE FILMS de cristal liquide (smectique) et de savon. Les films smectiques sont plus stables, car, avec le temps, l'eau s'évapore des films de savon, qui éclatent, tandis qu'un film smectique peut rester plusieurs semaines intact. Éclairées en lumière blanche, les plages d'épaisseurs différentes apparaissent de couleurs différentes du fait des effets d'interférence (voir la photographie ci-contre). On voit en fausses couleurs les différences d'épaisseur qui correspondent à des couches moléculaires. L'épaisseur de chaque couche est de trois milliardièmes de mètre.

«vibre» ainsi au cours du temps autour de sa position d'équilibre (horizontale). De son point de vue, il subit deux forces qui se compensent : d'une part, sa propre force d'inertie (due à son mouvement) ; d'autre part, il est soumis de la part du reste de la corde à une force, dite de «rappel», qui tend à le ramener vers sa position d'équilibre. Cette force de rappel est due à l'existence d'une tension dans la corde, qui s'oppose aux déformations éventuelles de celle-ci. Elle est proportionnelle à la courbure de la corde au point considéré ; en effet, plus la corde est courbée et plus le point a «envie» de retourner à sa position d'équilibre. Pour poser complètement le problème, il faut tenir compte du fait que la corde est attachée à ses deux extrémités («condition aux limites») : le déplacement de chaque extrémité de la corde est constamment nul au cours du temps.

Traduit en équations, ce problème est toujours soluble. La solution est une onde dite «stationnaire», ce qui signifie que la corde vibre en permanence, mais que cette vibration ne peut pas se propager ailleurs, ce qui est dû au fait que la corde est attachée aux deux extrémités et que sa longueur L est finie. Seules certaines fréquences de vibration sont possibles : on ne peut pas faire vibrer la corde à n'importe quelle fréquence.

Ces fréquences, dites «fréquences propres», sont en nombre infini, et sont des multiples de la fréquence fondamentale. Ce phénomène, bien connu, est à la base du principe de tous les instruments de musique à cordes : piano, violon, guitare, etc.

Remarquons que l'intervalle entre deux fréquences possibles est égal à $c/2L$: si L était infinie, cet intervalle tendrait vers zéro et n'importe quelle fréquence serait possible. Aussi le fait que seules certaines fréquences soient permises est bien dû à la condition aux limites sur les extrémités de la corde.

Vibrations des surfaces

Revenons au cas du film smectique mis en vibration, qui constitue un système à deux dimensions. Nous allons raisonner par analogie avec le cas de la corde, et voir les limites de cette analogie. Nous supposons que le film est infiniment fin et que sa surface est parfaitement plate au repos (ce qui

revient à négliger l'action de la pesanteur sur le film). On s'intéresse dorénavant à un point particulier de la membrane. Moyennant le même type d'approximations que pour la corde («régime linéaire»), on considère que la trajectoire de ce point est perpendiculaire au plan constitué par le film au repos. Ce point de la membrane subit également deux forces qui se compensent : une force d'inertie et une force de rappel. La force de rappel est due à la tension du film et elle est proportionnelle à sa courbure moyenne. La condition aux limites est que le film est attaché au cadre par le ménisque : là encore, les points situés «au bord» du film ne se déplacent jamais au cours du temps.

La solution au problème ainsi posé est encore une onde stationnaire : une solution correspondant à une certaine fréquence propre de vibration du film. La différence par rapport au cas de la corde est que le problème à deux dimensions est en général très difficile à résoudre par le calcul. En effet, la condition aux limites, qui implique une certaine répartition des fréquences propres, dépend de la forme du cadre, qui peut être plus ou moins compliquée. Dans le cas de la corde, le seul paramètre géométrique la définissant est sa longueur, ce qui est beaucoup plus simple.

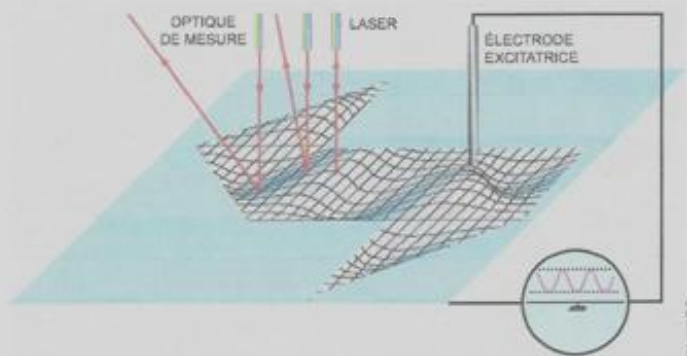
Pour quelques formes géométriques simples, on sait résoudre le problème : par exemple, quand le cadre est rectangulaire, circulaire ou triangulaire. Les fréquences propres, aussi bien dans le cas du carré que dans celui du cercle, ne sont plus réguliè-

lièrement espacées. Quand on entend un son formé de certaines des fréquences propres du carré ou du cercle, le résultat ne semble pas harmonieux, car notre oreille n'est pas habituée à des fréquences qui ne sont pas régulièrement espacées (comme c'est le cas pour tous les instruments de musique à cordes). En revanche, n'importe quel son formé de la superposition de certaines fréquences propres d'une corde nous semblerait tout à fait harmonieux.

La répartition des fréquences propres n'est pas identique pour le carré et pour le cercle. La question qui se pose alors naturellement est la suivante : connaissant les fréquences propres, pouvons-nous déterminer la forme de la surface? C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert ont répondu par la négative en identifiant un contre-exemple, c'est-à-dire deux contours de formes différentes ayant le même spectre de fréquences propres. Nous les avons nommés «flèche» et «cocotte» en raison de leur forme.

La vérification expérimentale a été faite pour la première fois par S. Sridhar et A. Kudrolli en 1993 : leur expérience utilisait des cavités micro-ondes très aplaties, qui sont des systèmes analogues aux membranes vibrantes. L'expérience que nous avons réalisée au Laboratoire de physique des solides d'Orsay utilise un film smectique de cristal liquide, tendu sur un cadre d'une forme donnée (qui est bien sûr changée au cours des expériences).

L'expérience est réalisée sous vide, pour des raisons aussi bien théoriques que pratiques. En effet, si l'on réali-



4. DISPOSITIFS D'EXCITATION ET DE DÉTECTION des vibrations d'une membrane. L'excitation est obtenue au moyen d'une électrode. La partie continue de la tension attire les charges de la membrane, qui s'accumulent sous l'électrode. La composante alternative de la tension exerce alors une force électrostatique sinusoïdale. La détection utilise la réflexion d'un faisceau laser sur la surface de la membrane.

Transplantation, cocotte et flèche

La transplantation est une méthode mathématique démontrant que les contours «flèche» et «cocotte» ont les mêmes fréquences propres. À chaque fréquence de vibration de la membrane correspond un mode propre, c'est-à-dire la forme de la membrane à cette fréquence. Cette forme est décrite par la fonction d'onde, une fonction des coordonnées d'espace et de temps qui décrit la forme que prend le film en vibration.

Nous supposons que nous connaissons une fonction d'onde de l'un des deux contours pour une certaine fréquence f ; nous allons construire, à partir de cette fonction d'onde, une fonction d'onde du deuxième contour, pour la même fréquence. Prenons une fonction d'onde Ψ de «flèche», figée par la pensée à un instant donné. Ψ est par définition solution du «problème» évoqué dans le texte, c'est-à-dire de l'équation traduisant l'équilibre des forces agissant sur un point du film – *équation d'onde* – plus les conditions aux limites (Ψ doit s'annuler sur les bords du contour «flèche»). Comment, à partir de Ψ , construire ϕ , solution de l'équation d'onde pour la même fréquence, mais avec la condition que ϕ s'annule, cette fois, sur le contour de «cocotte»? Commençons par un cas particulier simple : choisissons le mode correspondant aux dessins des figures a, b et c. Les deux contours sont constitués de sept triangles comportant chacun un ventre au centre ; la ligne de séparation entre deux triangles et le contour de la forme entière sont des lignes de nœuds. Découpons la fonction d'onde ainsi décrite en sept morceaux correspondant à chacun des triangles.

Collons maintenant ces morceaux sur «cocotte» : on trouve alors la fonction d'onde de «cocotte». On vérifie que cette technique ne donne pas de résultat quand on essaie de les coller sur un contour dont un des triangles est inversé par rapport à «cocotte». Ce procédé fonctionne parce que «cocotte» et «flèche» ont des formes adéquates.

Nous pouvons aussi effectuer ce type d'opération pour un autre mode de vibration de la membrane, dont l'allure ne correspond plus aux figures b et c, et dont les nœuds de vibration ne correspondent plus aux diagonales précédemment décrites. Pour ce faire, nous compliquons un peu le jeu. Nous découpons Ψ (qui n'a plus l'allure des figures a et b) en sept morceaux comme précédemment. La différence est que les lignes entre deux triangles selon lesquelles on coupe ne sont plus des lignes de nœuds *a priori*. Appelons $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_7$ les sept morceaux de Ψ (voir les figures d et e). La difficulté est qu'il ne suffit plus maintenant de coller les morceaux sur «cocotte» pour

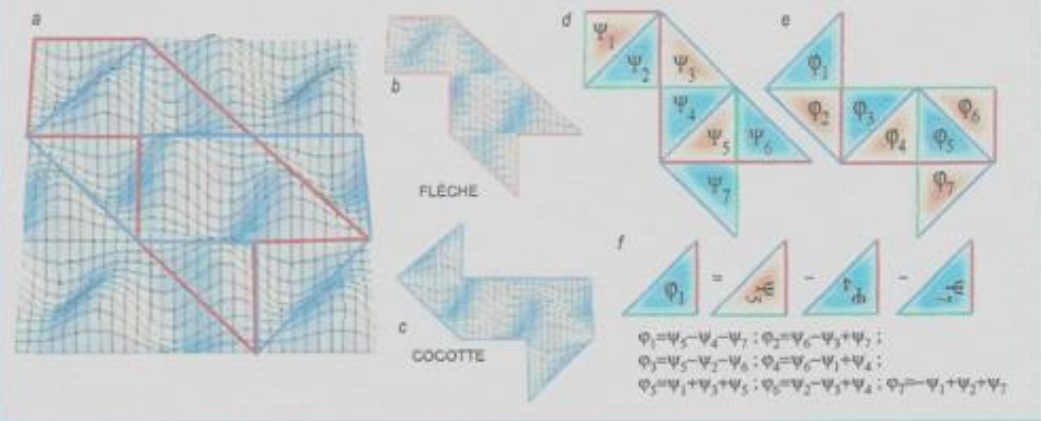
obtenir une fonction d'onde de celle-ci. Il faut effectuer trois collages, avec certains morceaux de Ψ qu'on a renversés (d'où les signes moins). La fonction ϕ est également découpée en sept morceaux numérotés de 1 à 7. Ainsi ϕ est égale à $\Psi_2 - \Psi_4 - \Psi_7$ sur le triangle en haut à gauche, à $\Psi_6 - \Psi_2 + \Psi_7$ sur le triangle juste en dessous, etc. Avant ces additions, on a fait coïncider les pourtours de couleurs des triangles, comme indiqué sur la figure f. Pourquoi cette opération? Pour que les conditions aux limites soient satisfaites.

La fonction ϕ ainsi construite doit s'annuler sur le contour de «cocotte». Considérons le triangle en haut à gauche de «cocotte», c'est-à-dire ϕ_1 . Cette partie de ϕ doit s'annuler sur les bords bleu et rouge du triangle considéré. Pour voir si c'est le cas, reportons-nous au dessin de «flèche» : on a $\Psi_2 = \Psi_4$ sur le bord bleu (Ψ est une fonction continue), donc $\Psi_2 - \Psi_4 = 0$; de plus, Ψ_7 s'annule sur le bord bleu, donc $\phi_1 = \Psi_2 - \Psi_4 - \Psi_7$ est bien nulle sur le bord bleu. Sur le bord rouge, $\Psi_5 = \Psi_7$ et $\Psi_4 = 0$, donc ϕ_1 s'annule bien sur ce bord-là également. On peut ainsi vérifier que chaque «restriction» de ϕ aux sept triangles de «cocotte» est bien nulle sur le contour.

Mais il y a une condition supplémentaire : la fonction ϕ , de même que Ψ , doit être une fonction continue, et ce notamment à la limite entre deux triangles. De plus, sa dérivée doit être également continue, afin d'assurer un raccord de pente «lisse» lors de l'opération de collage. Vérifions ce point pour ϕ_1 et ϕ_2 , c'est-à-dire l'égalité entre ϕ_1 et ϕ_2 , mais aussi entre leurs dérivées, sur le bord vert. Sur ce bord (voir à nouveau le dessin de «flèche»), $\Psi_5 = \Psi_6$, $\Psi_4 = \Psi_2$, et $\Psi_7 = 0$. La continuité de ϕ lors du passage de la «frontière» verte est alors assurée, tout comme celle de sa dérivée par le fait que Ψ_7 change de signe lors de ce passage, ce qui «renverse» la fonction et assure ainsi la continuité de la pente.

La fonction ϕ convient donc : elle a les propriétés de continuité requises pour une fonction d'onde, et nous avons réussi à la construire à partir d'une fonction d'onde de l'autre contour, pour une certaine fréquence propre f de ce dernier. Le fait que ϕ vibre à la même fréquence que Ψ peut se comprendre : nous n'avons fait que superposer des morceaux de Ψ vibrant tous à cette même fréquence f . En réalité, pour justifier que l'on a effectivement le droit d'effectuer cette superposition, il faut invoquer un argument de linéarité de l'équation d'onde, que nous passons sous silence ici.

La méthode décrite ici a été inventée par le mathématicien P. Buser, et adaptée à ces deux contours par un autre mathématicien, P. Bérard.



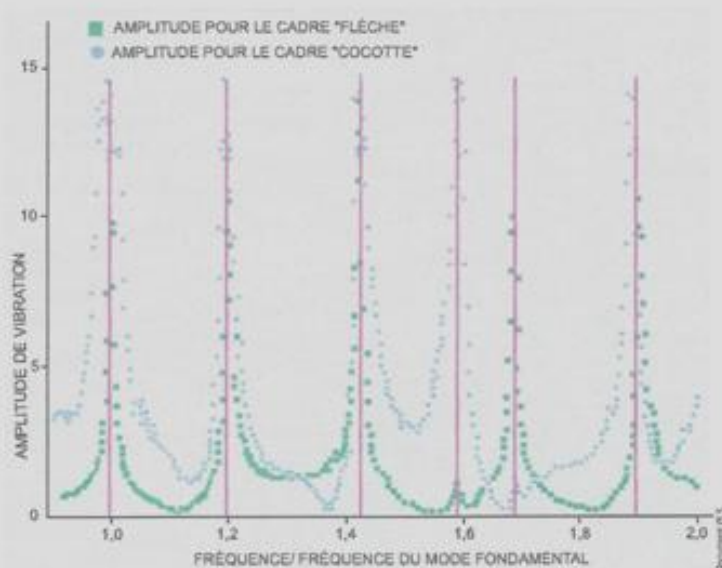
sait l'expérience dans l'air, ce dernier serait également mis en vibration, de sorte qu'il modifierait la vibration du film. De plus, un film sous vide a une durée de vie bien supérieure. L'inconvénient est qu'on ne peut pas exciter des ondes sonores à l'aide d'un haut-parleur dans le film mis sous vide. On utilise donc un dispositif d'excitation électrique, et ponctuel : il s'agit d'une électrode placée au-dessus du film. Le système de détection des vibrations du film est également ponctuel : on utilise en effet la réflexion d'un faisceau laser sur le film.

Nous avons donc tendu des films sur des cadres ayant la forme de «flèche» et de «cocotte». La figure 5 représente une courbe obtenue expérimentalement. On voit que les deux séries de pics d'amplitude (correspondant aux fréquences propres) pour «flèche» et pour «cocotte» se correspondent bien. Certains pics n'apparaissent que très écrasés : le mode correspondant est soit mal excité, soit mal détecté.

Effet Bag-Rohu

Ainsi, nous avons observé le comportement d'un film en vibration dans le régime linéaire, où nous avons adopté l'approximation que les trajectoires des points du film sont verticales. Cela revient à négliger la valeur de l'amplitude de vibration devant la taille du film. Lorsque les deux sont du même ordre de grandeur, le film se casse telle une corde trop tirée (néanmoins les cordes, étant plus rigides, se brisent plus difficilement). Mais quel est le comportement du film en vibration dans le cas intermédiaire, lorsque l'amplitude est très petite, mais non négligeable par rapport à la dimension du film ?

En réalité, les trajectoires des points d'un film en vibration sont toujours légèrement courbées, et cette courbure est d'autant plus importante que l'amplitude de vibration est grande. La force centrifuge agit sur chaque corps se déplaçant sur une courbe et tend à le ramener vers une trajectoire rectiligne. Cette force lutte par exemple contre l'effet de gravitation et empêche les planètes en rotation de tomber sur le Soleil. Dans le cas des films smectiques, cette force a été baptisée force non linéaire. Cette force est proportionnelle à l'épaisseur



5. CES DEUX COURBES OBTENUES EXPÉRIMENTALEMENT correspondent aux cadres «flèche» et «cocotte». Une courbe représente l'amplitude de la déviation du faisceau laser réfléchi en un point donné du film en fonction de la fréquence d'excitation. Une fréquence propre de vibration correspond à un pic sur le graphe. On voit que les deux séries de pics correspondent aux deux cadres. Cependant, certains pics de «flèche» sont très écrasés pour «cocotte» et réciproquement. Cela est dû aux deux dispositifs d'excitation et de détection, qui sont ponctuels : certains modes sont mal excités, ou alors on a mis la détection au «mauvais endroit» pour l'un des modes.

du film, et inversement proportionnelle au rayon de courbure de la trajectoire de l'élément du film. Comme le rayon de courbure change d'un point à un autre, la force non linéaire n'est pas homogène. Ainsi, si l'épaisseur du film n'est pas uniforme, les plages plus épaisses sont entraînées vers les «ventres» du film en vibration où les trajectoires sont les moins courbées.

L'intérêt des expériences utilisant des films smectiques est leur grande maniabilité. De plus, ils constituent de véritables membranes sans qu'aucune analogie soit nécessaire, comme dans le cas des cavités micro-ondes. En

outre, les équations qui déterminent les fréquences propres de vibration sont analogues à l'équation de Schrödinger bidimensionnelle. Ainsi, la forme du film en vibration peut être «associée» à la fonction d'onde d'une particule quantique évoluant dans un puits de potentiel.

Les problèmes abordés dans cet article concernaient les films smectiques composés de couches liquides. Il existe également d'autres types de smectiques ; les différences entre ces mésophases se manifestent dans la force de rappel. Ainsi, en écoutant les vibrations du film, on peut «entendre» sa structure.

Maria BRAZOVSKAIA, Catherine EVEN et Pawel PIERANSKI sont chercheurs au Laboratoire de physique des solides, à Orsay.

P. PIERANSKI et al, *Phys. A*, vol. 194, n° 364, 1993.

J.W. RAYLEIGH, *The Theory of Sound*, Dover Publishing Inc., 1945.

M. KAC, *Am. Math. Monthly*, vol. 73, n° 1, 1966.

C. GORDON et D. WEBB, *You Can't Hear*

the Shape of a Drum, in *American Scientist*, janvier-février 1996.

S. SRIDHAR et A. KUDROLLI, *Phys. Rev. Letters*, vol. 72, n° 2175, 1994.

M. ALBERTINI, J.-C. LACOUTURE et X. POUURET, stage effectué au Laboratoire de physique des solides, 1996.

M. BRAZOVSKAIA, H. DUMOULIN et P. PIERANSKI, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, 1996.

Isabelle KRAUS, thèse de doctorat, Orsay, 1995.