REPONSE D'UN FILTRE A UN SIGNAL PERIODIQUE NON SINUSOIDAL

I. DECOMPOSITION D'UN SIGNAL PERIODIQUE

Toute fonction périodique de fréquence f (et de période T) est décomposable en série de Fourier sous la forme :

$S(t) = \dfrac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos(2\pi nft) + B_n \sin(2\pi nft))$, où :

- $A_n = \dfrac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\cos(2\pi nft)dt$ et $B_n = \dfrac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\sin(2\pi nft)dt$, t_0 étant un instant quelconque.
- $\dfrac{A_0}{2}$ est la valeur moyenne du signal S(t), soit $\dfrac{A_0}{2} = \langle S(t)\rangle = \dfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)dt$.

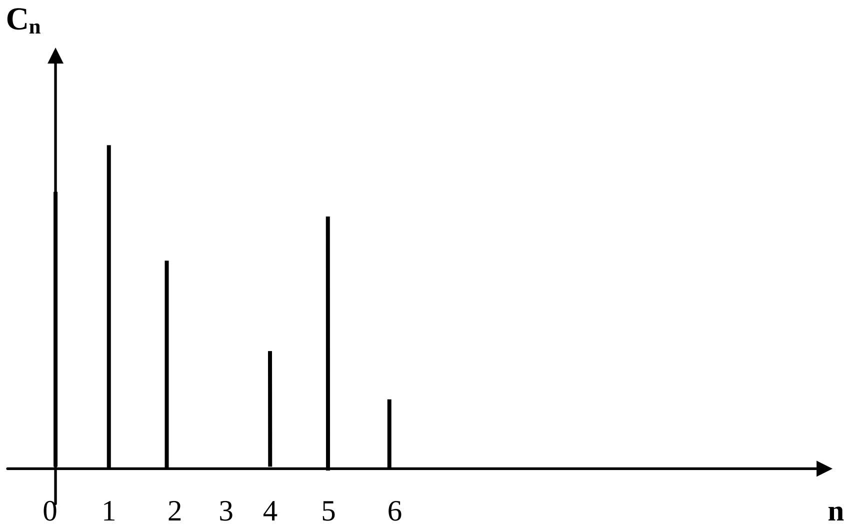
  En électricité cette valeur moyenne représente la composante continue du signal.

- Pour une fonction paire, la série de sinus est nulle.
- Pour une fonction impaire, la série de cosinus est nulle ainsi que la composante continue.

Une autre forme de la décomposition s'écrit :

$S(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi nft + \varphi_n)$, où :

- $C_0 = \dfrac{A_0}{2}$,
- $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, cette valeur représente l'amplitude de l'harmonique de rang n. La donnée des valeurs de C_n correspond au **spectre en fréquence** du signal :



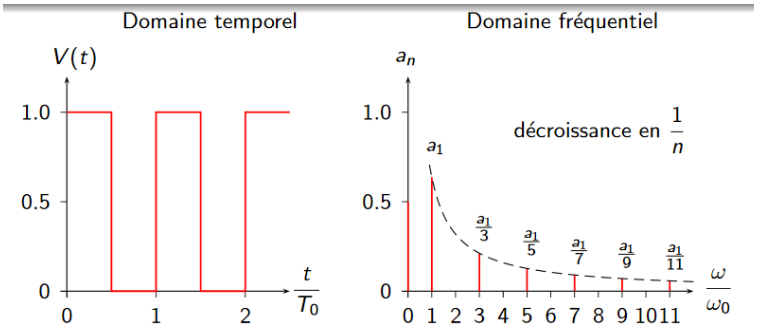
R : Pour n > 0, C_n est positif, mais C_0 peut être positif ou négatif.

- $\varphi_n = -\arctan(\dfrac{B_n}{A_n})$.

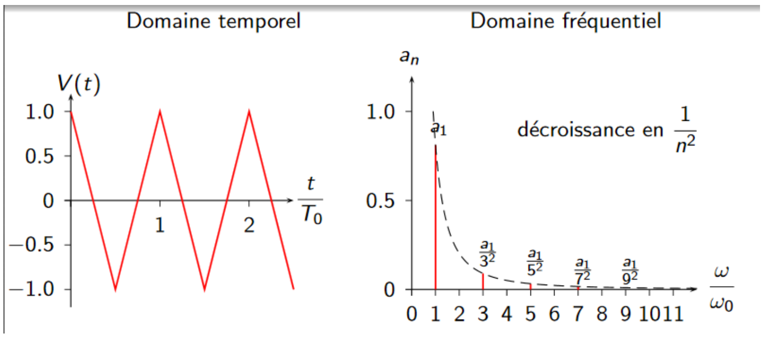
  Les deux décompositions seront utilisées dans le cours de cette année ; il convient donc de les connaître toutes les deux.

- Dans les exercices et en TP, les signaux utilisés sont essentiellement le signal créneau et le signal triangulaire ; les deux décompositions les plus simples sont celles du :

  - Signal créneau symétrique impair de valeur moyenne nulle, d'amplitude A :
    - $A_n = 0$,
    - $B_{2p} = 0$,
    - $B_{2P+1} = \dfrac{4\mathbf{A}}{\pi}\dfrac{1}{2\mathbf{p}+1}$.



  - Signal triangulaire symétrique pair de valeur moyenne nulle et d'amplitude A :
    - $B_n = 0$,
    - $A_{2p} = 0$,
    - $A_{2P+1} = \dfrac{8\mathbf{A}}{\pi^2}\dfrac{1}{(2\mathbf{p}+1)^2}$.



R_1 : La dérivée terme à terme de cette décomposition donne bien le signal créneau symétrique impair ci-dessus.

R_2 : Les coefficients de Fourier des différents signaux étudiés seront toujours donnés dans les problèmes et les exercices.

II. METHODE GENERALE D'ETUDE

- Soit un signal S(t) périodique attaquant un filtre linéaire quelconque.

- Soit $H(j\omega)$ la fonction de transfert du filtre.

- La méthode générale d'étude est la suivante :

  1. Décomposition du signal d'attaque : $S(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi nft + \varphi_n)$.

  2. Passage en complexe : chaque composante du signal est associée à la fonction complexe $\underline{C_n} = C_n \exp(j\varphi_n)$.

3. Transformation par le filtre de cette composante complexe en une composante complexe de sortie, $\underline{C'_n} = C'_n \exp(j\varphi'_n)$, telle que :
    - $C'_n = C_n|H(jn\omega)|$,
    - $\varphi'_n = \varphi_n + \arg(H(jn\omega))$.

4. Retour à la composante réelle $C'_n\cos(2\pi nft + \varphi'_n)$.
5. Recomposition du signal de sortie : $S'(t) = C'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C'_n \cos(2\pi nft + \varphi'_n)$.

Le point 3. montre que le diagramme de BODE en amplitude et en phase constitue l'outil de base de la détermination du signal de sortie.

La méthode précédente repose sur des linéarités physiques et mathématiques et ne peut être utilisée que pour des filtres linéaires.

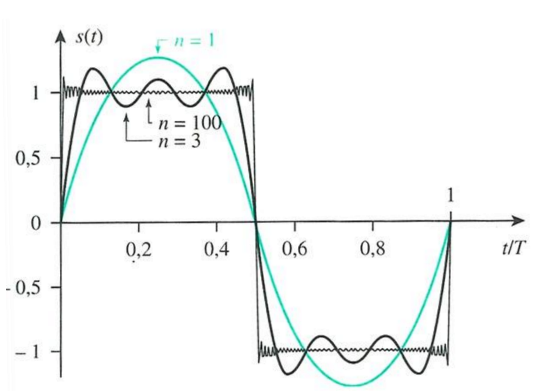
R : Elle suppose aussi que la somme de n = 0 à l'infini des composantes de sortie converge, ce que nous considérerons toujours vérifié.

- **Efficacité de la reconstitution**

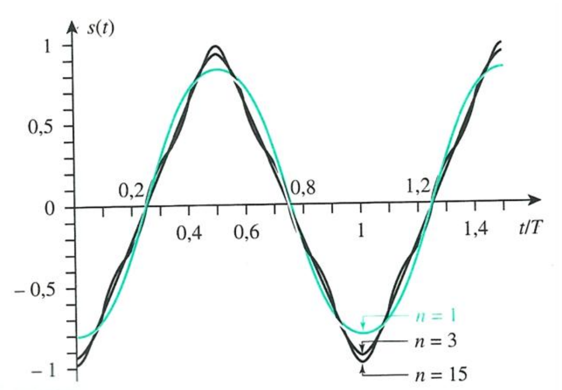
Pour reconstituer convenablement et « manuellement » le signal de sortie, il faut utiliser suffisamment d'harmoniques du signal d'entrée.

Il est certain que plus les A_n et les B_n convergent vite, moins ce nombre doit être grand ; il n'est ***en général*** pas nécessaire d'aller au-delà du rang 10.

La reconstitution du signal créneau pose un problème classique dû à la variation brutale de la tension entre une valeur basse et une valeur haute : on le nomme "phénomène de Gibbs".



Reconstitution d'un signal créneau
à partir de ses harmoniques



Reconstitution d'un signal triangulaire
à partir de ses harmoniques

R : il est assez facile de comprendre que les composantes hautes fréquences correspondent à des variations temporelles brutales du signal (et réciproquement…) : ainsi plus le signal est « lisse » moins sa reconstitution nécessitera un nombre élevé d'harmoniques.