I. Une observation expérimentale

Photo prise 10 secondes après l'impact

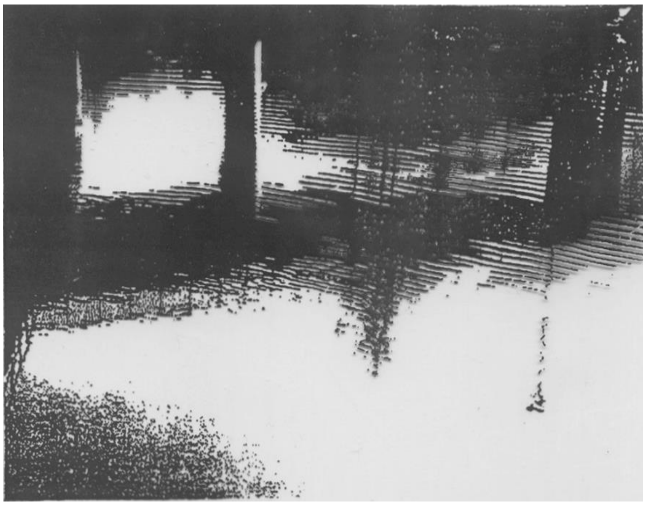


Photo prise 20 secondes après l'impact

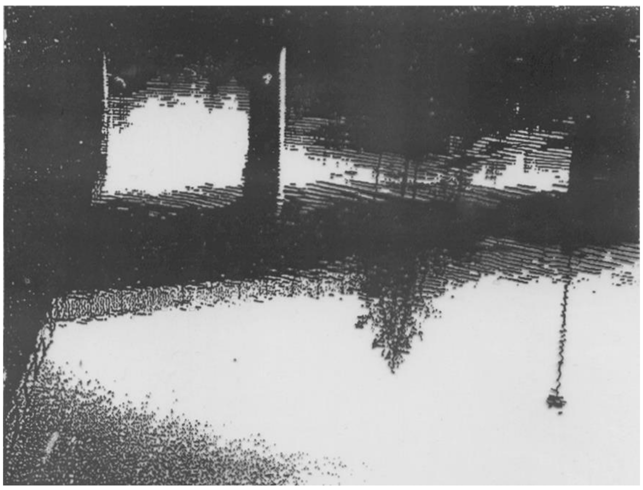


Photo prise 30 secondes après l'impact

II. Relation de dispersion

- L'OPPH nous a permis de montrer qu'à partir de l'équation de propagation, on pouvait obtenir la relation de dispersion liant $\underline{k}$ et ω. Si l'on note $\underline{k} = k' - jk''$:

- k'' fournit une information sur l'atténuation (ou l'amplification) de l'onde lors de sa propagation (ou sur son caractère évanescent si elle est stationnaire)
- k' fournit la vitesse de phase de l'onde $v_\phi = \frac{\omega}{k'}$ et indique si celle-ci est fonction de ω, donc si la propagation est dispersive .

- Le tableau ci-dessous rassemble quelques situations vues en cours et en exercices :

	k'	**k''**	**Profondeur de pénétration (distance caractéristique d'atténuation)**	**Vitesse de phase**	**Dispersion**
Corde vibrante **Coaxial** **OEM dans le vide** **Ondes acoustiques**	$\frac{\omega}{c}$	0	Infinie	$\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ $\sqrt{\frac{1}{\Lambda\Gamma}}$ $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}$ $\sqrt{\frac{1}{\rho_0\chi_S}}$	NON
Pavillon exponentiel	$k' = \frac{\omega}{c}(1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2})^{1/2}$ avec $\omega > \omega_c$	$\frac{1}{2a}$	$2a$	$\frac{c}{\sqrt{(1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2})}}$	OUI
Diffusion du champ EM : Effet de peau	$\frac{1}{\delta}$	$\frac{1}{\delta}$	$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$	$\omega\delta$	OUI
Propagation dans un plasma	$k' = \frac{\omega}{c}(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2})^{1/2}$ avec $\omega > \omega_p$	0	Infinie	$\frac{c}{\sqrt{(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2})}}$	OUI

- L'OPPH ne peut représenter une onde réelle (possibilité de vitesse de phase supérieure à c, énergie volumique uniforme) ; il nous faut donc chercher une manière de localiser un signal dans le temps et dans l'espace.

III. Groupe de deux ondes

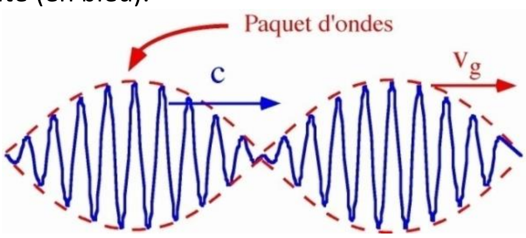
On cherche à former le signal par superposition et l'on considère ici un « groupe » de deux ondes *de pulsations proches et de même amplitude* :

$A.\cos(\omega_1 t - k_1 x)$ et $A.\cos(\omega_2 t - k_2 x)$.

Sommons ces deux ondes :

$A.\cos(\omega_1 t - k_1 x) + A.\cos(\omega_2 t - k_2 x) = 2A.\cos(\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t - \frac{(k_1+k_2)}{2}x).\cos(\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t - \frac{(k_1-k_2)}{2}x)$, que l'on peut écrire, en tenant compte de $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega_0$ et $k_1 \sim k_2 \sim k_0$, $2A.\cos(\omega_0 t - k_0 x).\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x)$.

Traçons la courbe correspondante (en bleu):



En bleu la courbe – En rouge l'enveloppe du paquet d'onde

Le signal (en bleu) possède des maximas localisés dans l'espace (ou le temps) ; il est donc « plus localisé » qu'une sinusoïde pure, mais toujours périodique et donc infiniment étendu dans le temps et l'espace.
La courbe rouge correspond à la fonction cos($\frac{\Delta\omega}{2}$t $-$ $\frac{\Delta k}{2}$x), qui traduit une propagation à la vitesse $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$. Cette fonction représente l'enveloppe du paquet de deux ondes.

v_g = $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ est la vitesse de propagation du groupe constitué des deux ondes

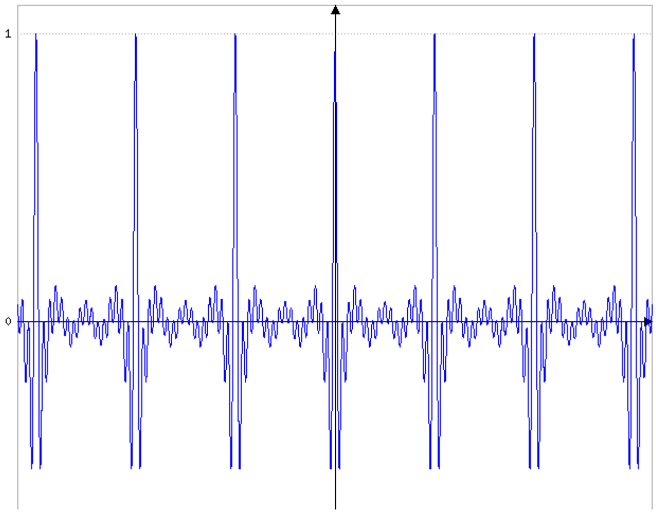
Chacune des deux ondes progresse à l'intérieur du paquet à la vitesse c $\sim$ $\frac{\omega_0}{k_0}$.

IV. Signal réel

A. Définition d'un paquet d'ondes

A partir de l'exemple du « paquet » de deux ondes, il convient de définir proprement un groupe d'ondes correspondant à la propagation d'un signal réel.

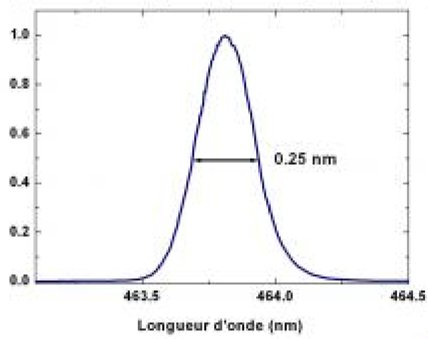
On peut essayer de sommer N ondes sinusoïdales : ci-dessous le signal est obtenu avec 13 sinusoïdes de fréquences proches : le signal est de plus en plus localisé, mais il est toujours périodique et donc présent « partout dans l'espace et dans le temps »



En fait, la localisation spatiale et temporelle d'un signal exige qu'il soit défini comme la superposition continue d'ondes PPM : Il sera donc défini comme une intégrale portant sur la pulsation (liée à la variable temps) ou le nombre d'onde (lié à la variable d'espace)
Ainsi, la définition ci-dessous correspond à sommer des ondes PPM dont la pulsation ω et le nombre d'onde k, sont liés par une relation de dispersion ω(k) :

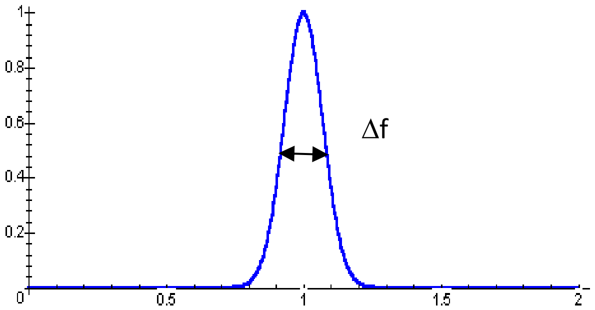
$$\mathcal{A}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}(k)e^{j(\omega t - kx)}\,\mathrm{d}k$$

$\mathcal{A}$(k) est l'amplitude de l'onde de nombre d'onde k. Une représentation de cette fonction correspond à la courbe suivante pour un rayonnement LASER bleu :

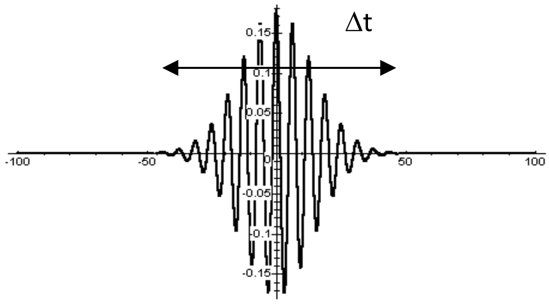


Spectre en longueur d'onde (l'axe des ordonnées est en unité arbitraire)
La largeur à mi-hauteur est de 0.25nm, ce qui correspond à une très grande monochromaticité

Ci-dessous un signal gaussien : à gauche sa représentation spectrale et à droite sa représentation temporelle (à un endroit donné) ou spatiale (à un instant donné) :



Distribution spectrale



Extension spatiale ou temporelle

Une propriété importante, à connaître, des signaux réels décrits par un paquet d'ondes :

L'extension temporelle d'un paquet d'ondes est d'autant plus grande que sa largeur spectrale fréquentielle est faible : $\Delta f.\Delta t \sim 1$

B. Propagation d'un paquet d'onde – Vitesse de groupe (complément)

Si le milieu dans lequel se propage l'onde n'est « pas trop » dispersif et que la largeur spectrale du paquet n'est « pas trop grande », on peut écrire la relation de dispersion au premier ordre en k :

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0)\left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0}$$

La quantité $\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}$ est homogène à une vitesse.

On développe alors le terme de phase ω_0 représente $\omega(k_0)$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathcal{A}}(k) e^{j(\omega t - kx)}\,\mathrm{d}k \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathcal{A}}(k) \exp\left[j\left(\omega_0 t + (k-k_0)\left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0} t - kx\right)\right]\mathrm{d}k \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathcal{A}}(k) \exp\left[j\left(\omega_0 t - x(k-k_0) - k_0 x + (k-k_0)\left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0} t\right)\right]\mathrm{d}k \\ &= e^{j(\omega_0 t - k_0 x)}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathcal{A}}(k) \exp\left[j(k-k_0)\left(\left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k0} t - x\right)\right]\mathrm{d}k\end{aligned}$$

L'expression obtenue se met sous la forme :

$$\mathcal{A}(x,t) = \mathcal{E}(x,t)e^{j(\omega_0 t - k_0 x)}$$

- Le terme exponentiel représente l'onde centrale du paquet ; sa pulsation est ω_0 et son nombre d'onde k_0.
- $\mathcal{E}(x, t)$ représente la forme du paquet d'onde en x à l'instant t ; cette fonction correspond au terme $\cos((\Delta\omega/2)t - (\Delta k/2)x)$ qui décrit l'enveloppe du paquet de deux ondes.

L'enveloppe du paquet d'onde progresse à la vitesse $\frac{d\omega}{dk}$ appelée vitesse de groupe du paquet d'ondes.

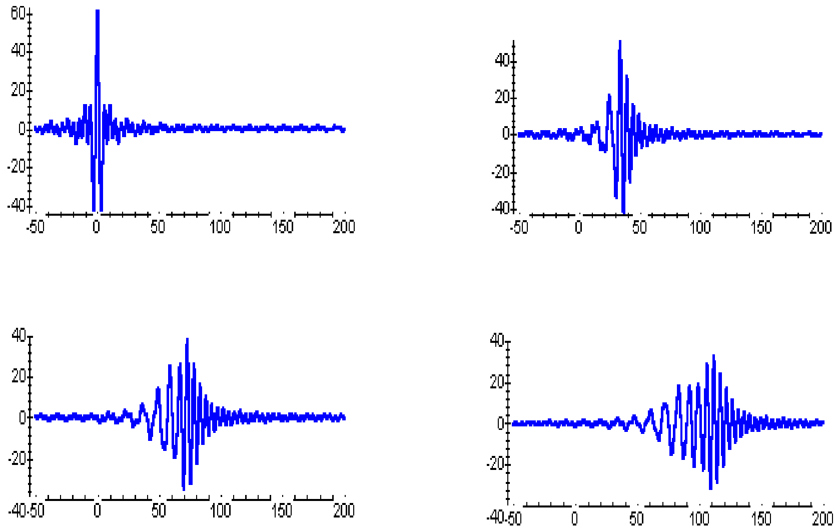
A RETENIR

- **Un signal réel peut être représenté par une superposition continue d'ondes PPH.**

- **Chaque onde de ce paquet possède une vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k'}$; en cas de dispersion, celle-ci est fonction de ω.**

- **Le paquet d'onde possède une vitesse de groupe elle aussi fonction de ω *a priori :***
  Elle est définie par : $v_g = \frac{d\omega}{dk'}$

- **Lors de la propagation, le paquet d'onde se déforme et s'étale :**



Forme du paquet d'ondes à des instants successifs

R : Sur la simulation ci-dessus, la relation de dispersion est du type « Klein-Gordon » : $k^2 = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_P^2)$, avec $\omega > \omega_P$

- **L'extension temporelle d'un paquet d'ondes est d'autant plus grande que sa largeur spectrale fréquentielle est faible** : $\Delta f . \Delta t \sim 1$