EQUILIBRAGE des corps tournants

I- PROBLEME A RESOUDRE

II- ETUDE THEORIQUE

L'exploitation et la conclusion de l'application du ***PFD*** sera vue en cours.

I- PROBLEME A RESOUDRE

La rotation de solides autour d'un axe fixe génère souvent des vibrations entraînant :

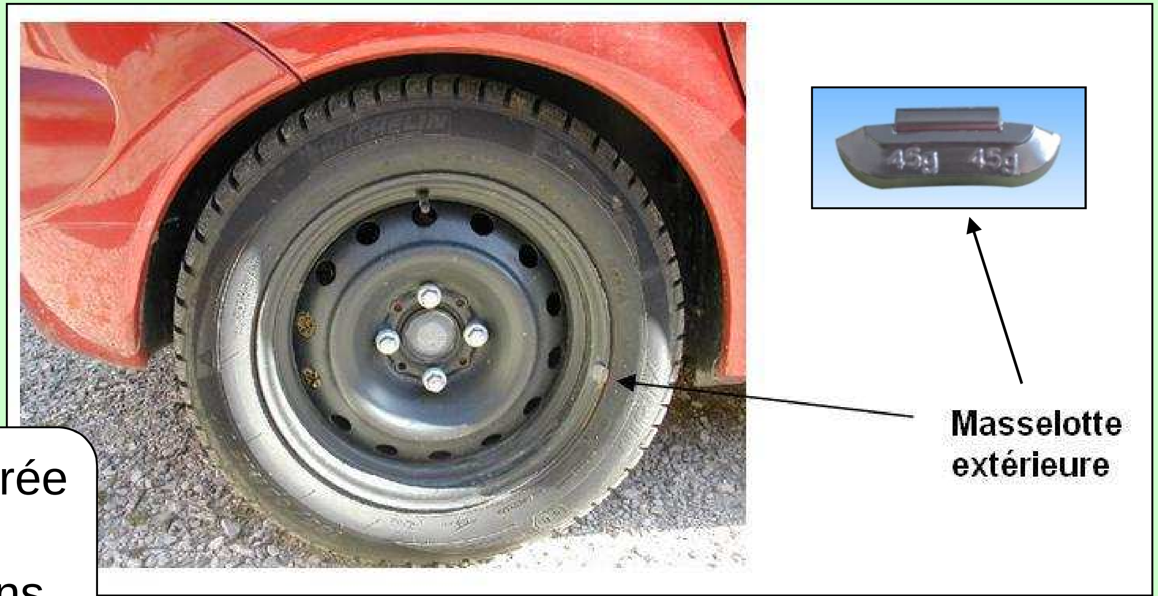
☞ ***Détérioration rapide des paliers (chocs, fatigue)***

☞ ***Bruit***

☞ ***Gêne éventuelle pour l 'utilisateur***
→ ***volant de voiture***

Le but du mécanicien est donc de faire en sorte que ces corps tournants n'engendrent pas de vibrations.

Problème des vibrations sur les roues de voiture



Une roue de voiture non équilibrée (par ajout de deux petites masselottes) crée des vibrations importantes lors de sa rotation. Vibrations que l'on ressent au niveau du volant.

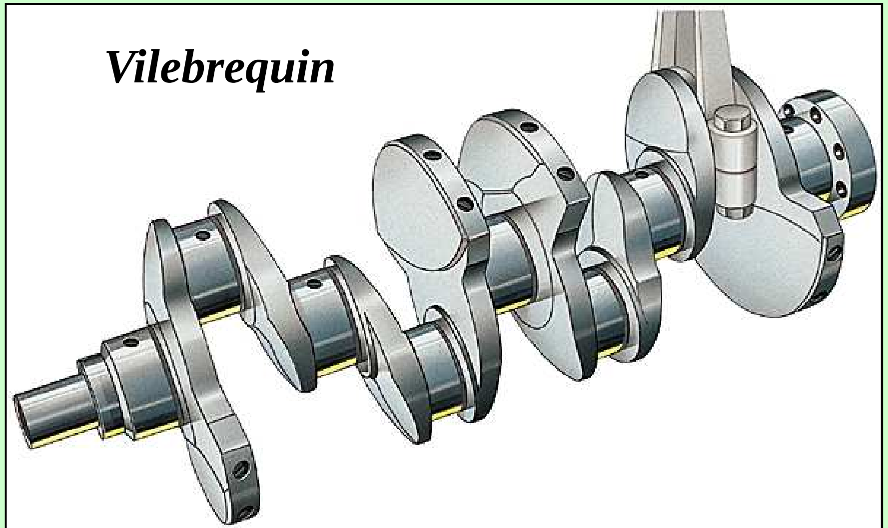
Equilibreuse pour garagiste

Exemples de pièces où le problème des vibrations se pose…

Arbre d'alternateur

Turbine Pelton

Vilebrequin



II- ETUDE THEORIQUE

Cette étude va se faire en deux temps :

1er temps

Révisions du ***PFD***.

- calcul des efforts supportés par le palier S_0 lors de la rotation du solide S autour de l'axe de rotation $O\vec{z}_0$

2ème temps

Sera vu pendant le cours.

- recherche des moyens théoriques pour rendre constants ces efforts et éviter ainsi toute vibration.

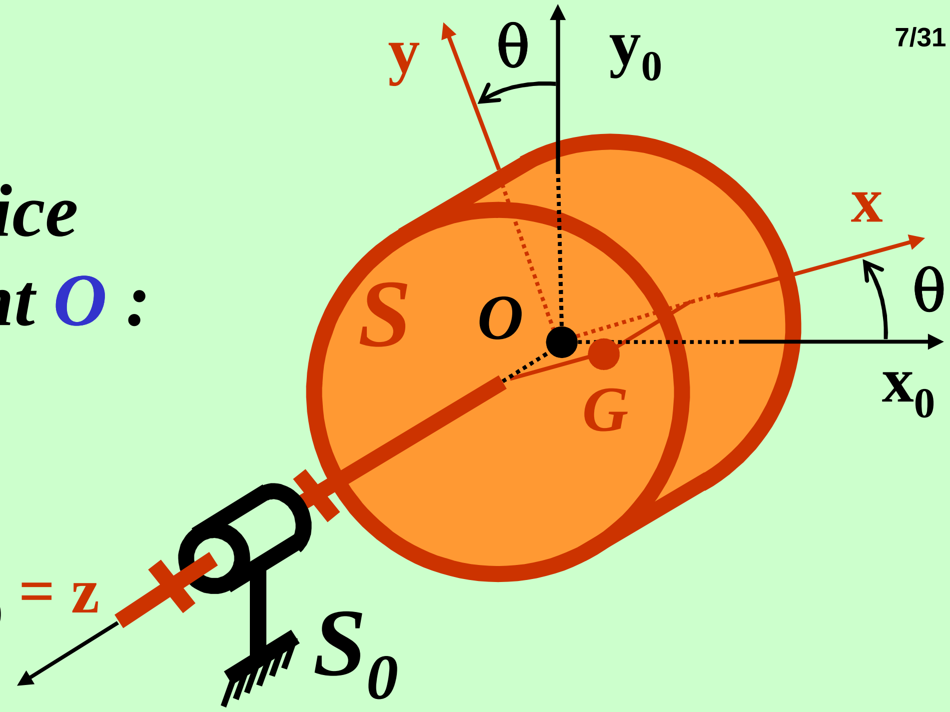
1^{er} temps

$\downarrow$

PFD

a) Hypothèses :

*On suppose connue la matrice d'inertie du solide **S** au point **O** :*



$$I(O,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_R$$

$(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$
lié à la pièce

Ainsi que la position du centre de gravité :

$$\overrightarrow{OG} = a.\vec{x} + c.\vec{z}$$

b) Calculs :

► **1- Ensemble isolé :**

solide S (celui qui tourne!)

► **2- Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) :**

pesanteur

pivot

moteur

► 3- Application du PFD :

Pour le mouvement de *S* par rapport à S_0 avec écriture des moments au point *O*

point fixe pour S / S_0

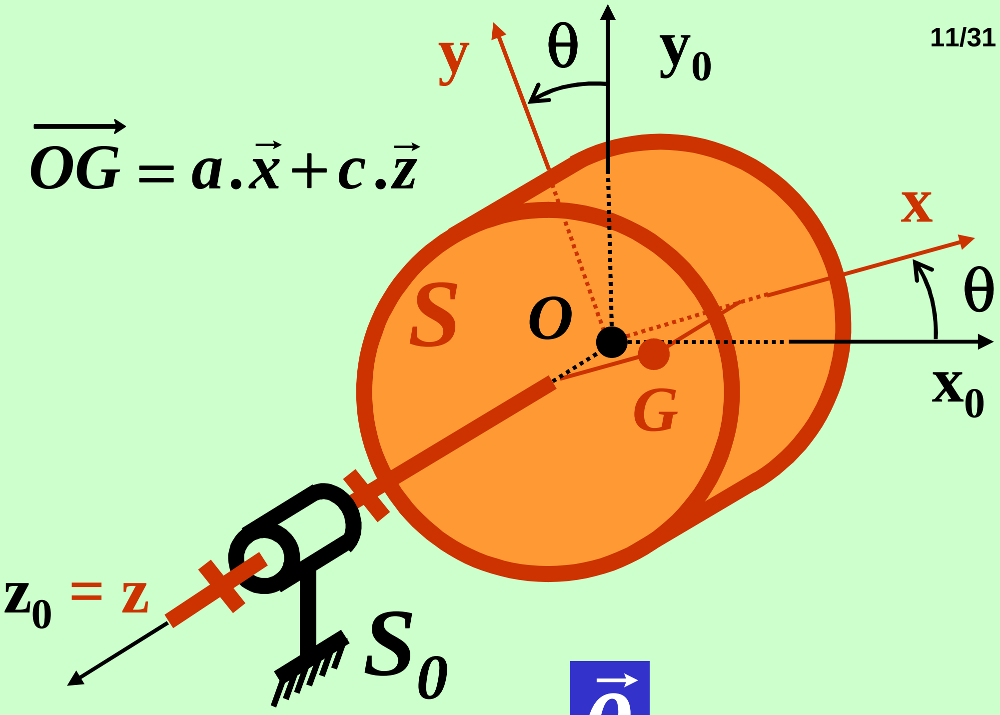
Utilisation de l'outil torseur pour obtenir six équations

Mise en place des 3 torseurs d'effort écrits en O

Torseur de l'action de la pesanteur

$$\left\{ \mathsf{F}_{pes \to S} \right\}_G$$

$$= \left\{ -m.g\,\vec{y}_0 \;;\; \vec{0} \right\}_G$$



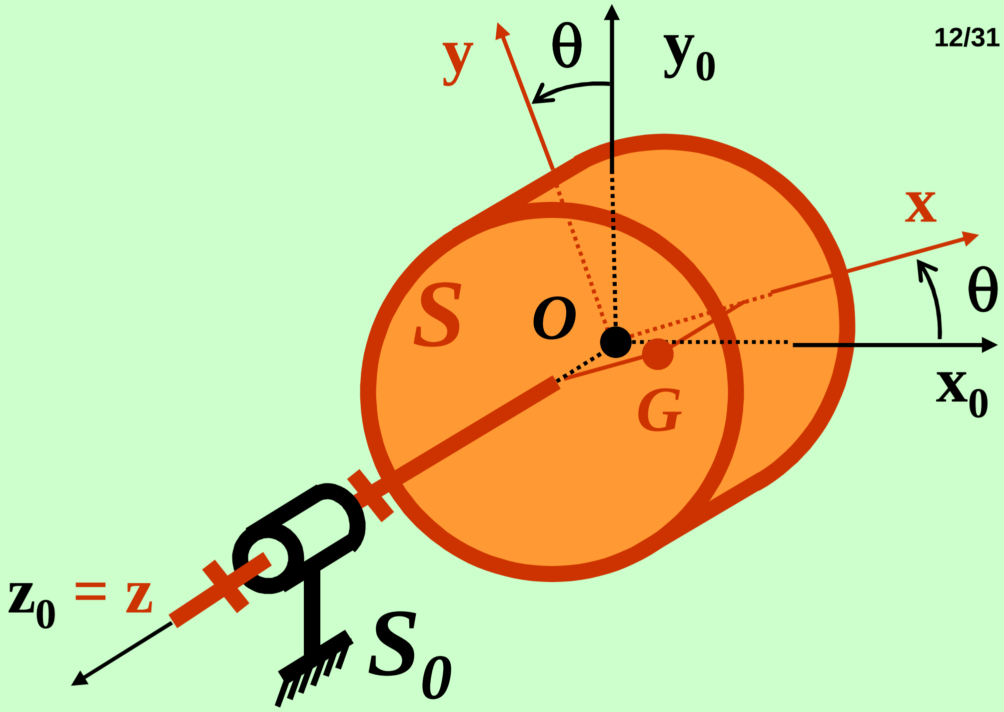
Moment en O :

$$\overrightarrow{M_O} = \cancel{\overrightarrow{M_G}}^{\,\vec{0}} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{R}$$

$$= \begin{bmatrix} a.\cos\theta \\ a.\sin\theta \\ c \end{bmatrix}_{R_0} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} = \boxed{\begin{bmatrix} cmg \\ 0 \\ -amg\cos\theta \end{bmatrix}_{R_0}}$$

Torseur de l'action du bâti (pivot)

$$\left\{\mathsf{F}_{bâti \to S}\right\}_O$$



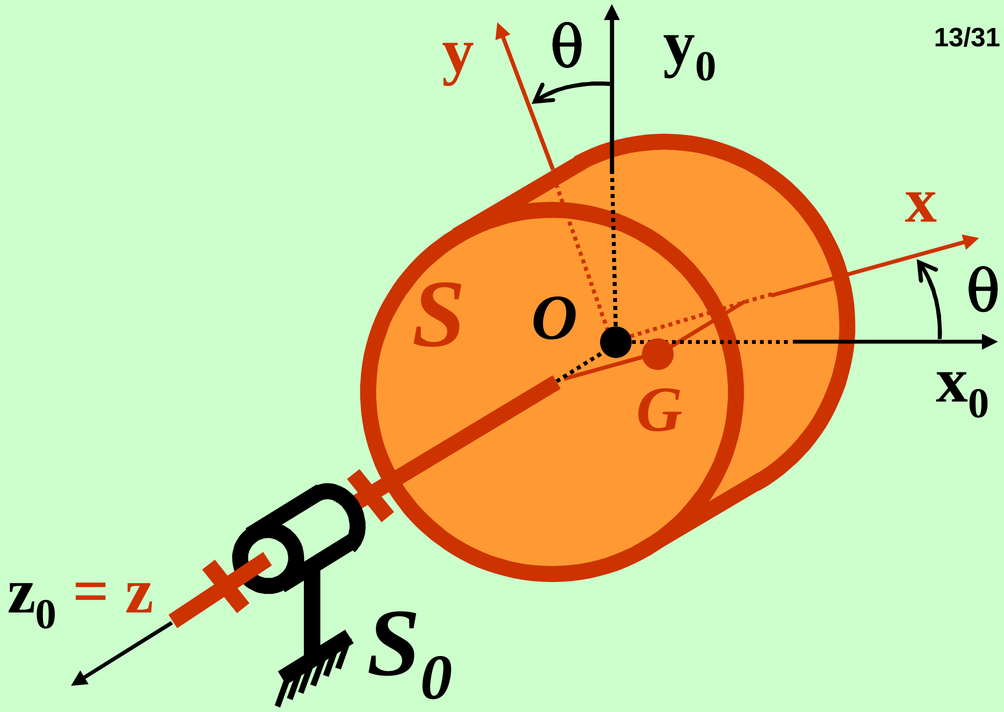
$$\left\{\mathsf{F}_{bâti \to S}\right\}_O = \left\{\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} L \\ M \\ 0 \end{bmatrix}\right\}_{O,\,R_0}$$

Vrai en tout point de l'axe de rotation

Même forme dans R

Torseur de l'action du moteur

$$\left\{ \mathcal{F}_{mot \to S} \right\}_O$$



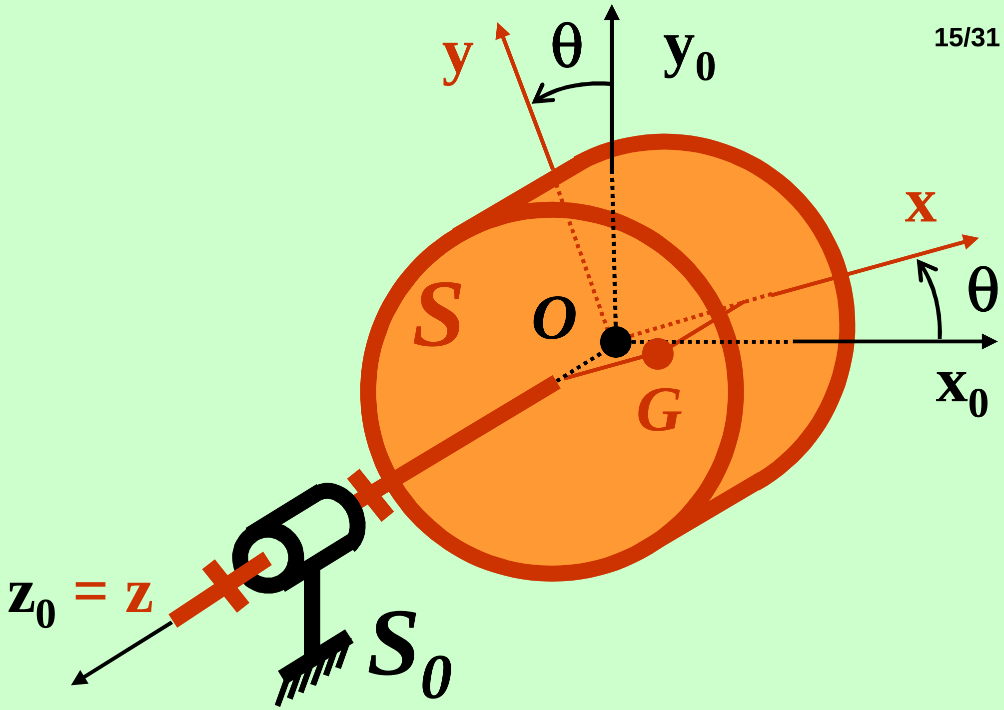
$$\left\{ \mathcal{F}_{mot \to S} \right\}_O = \boxed{\left\{ \vec{0} \; ; \; C_m \overrightarrow{z_0} \right\}_{O,R_0}}$$

ou R

Vrai en tout point de l'axe de rotation

Mise en place du torseur dynamique écrit en O

Torseur dynamique en 0 de S / S_0



Résultante dynamique :

$$m \times \overrightarrow{\Gamma_{G \in S / S_0}} = \boxed{m \times \left(\frac{d \left[\overrightarrow{V_{G \in S / S_0}} \right]}{d\,t} \right)_{/S_0}}$$

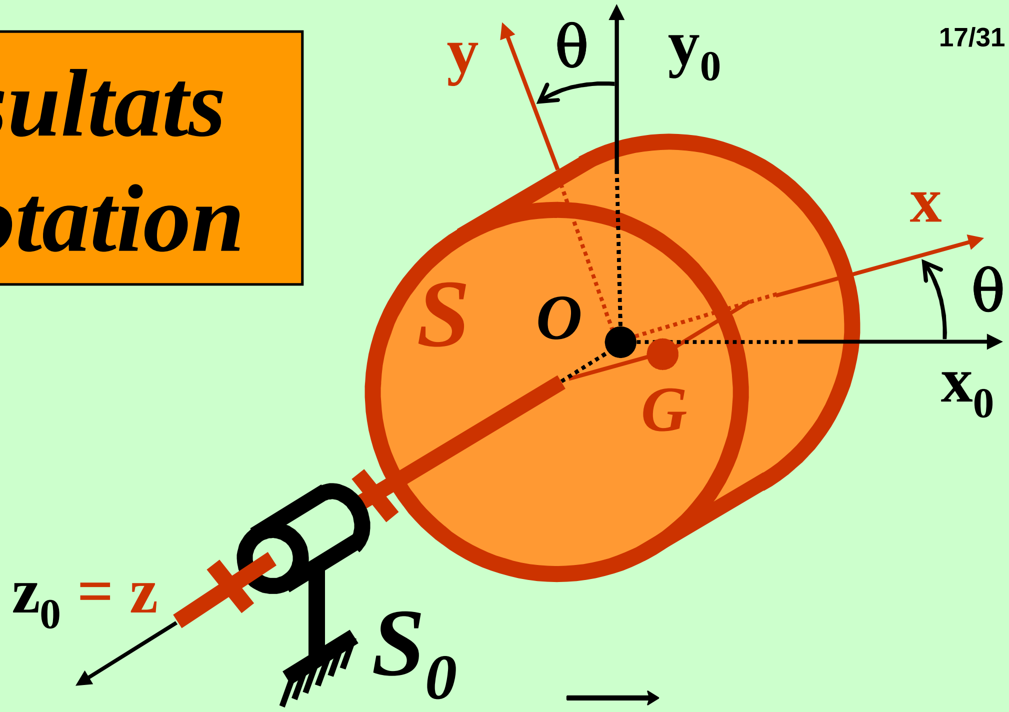
Calcul de la vitesse

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{V_{G \in S / S_0}}$$

Trois méthodes possibles :

- ☞ **Utilisation des résultats du mouvement de rotation**
- ☞ **Changement de point**
- ☞ **Dérivation du vecteur position**

▷ Utilisation des résultats du mouvement de rotation



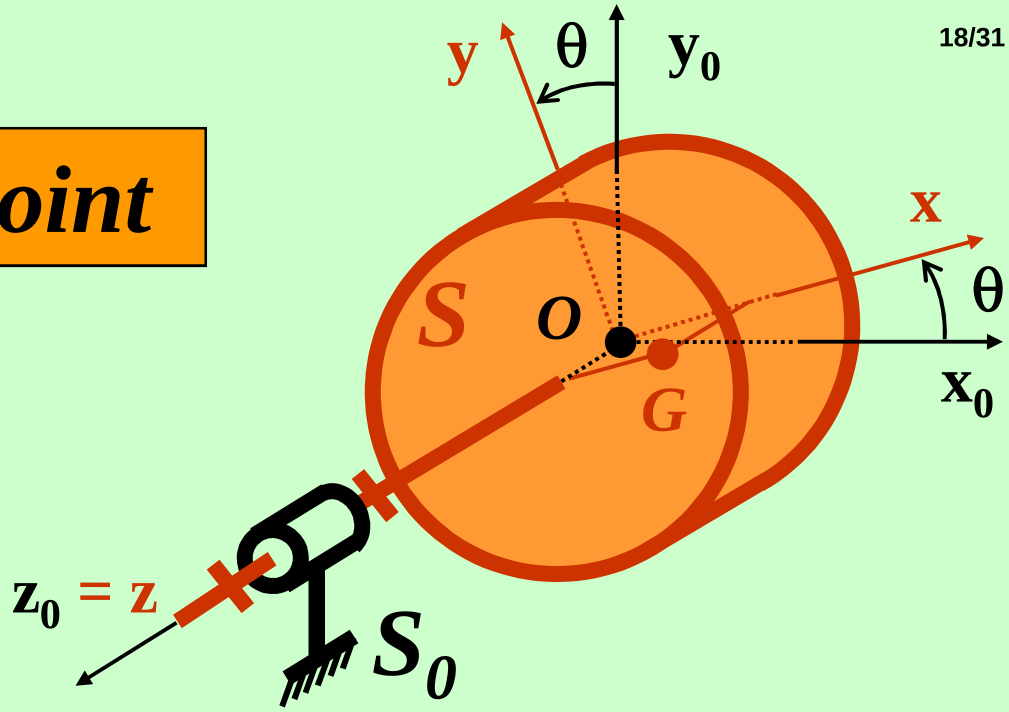
$$\overrightarrow{OG} = a.\vec{x} + c.\vec{z}$$

$$"\ V = R.\omega\ "$$

d'où avec les notations de l 'énoncé :

$$\overrightarrow{V_{G\in S/S_0}} = a.\dot{\theta}.\vec{y}$$

▷ Changement de point

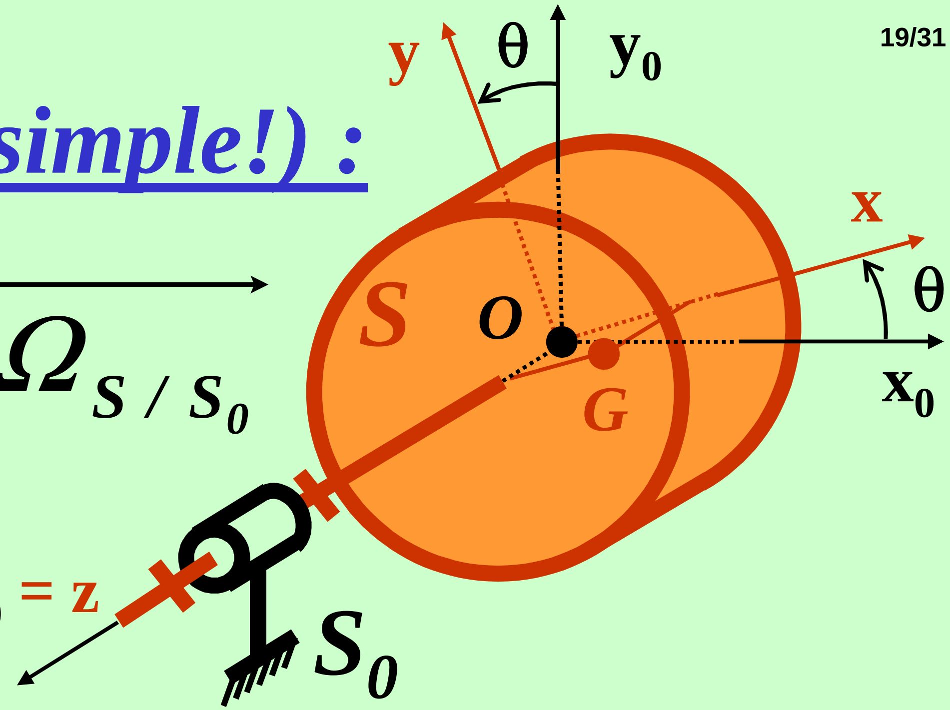


en passant par O

$$\overrightarrow{V_{G\in S/S_0}} = \cancel{\overrightarrow{V_{O\in S/S_0}}} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/S_0}}$$

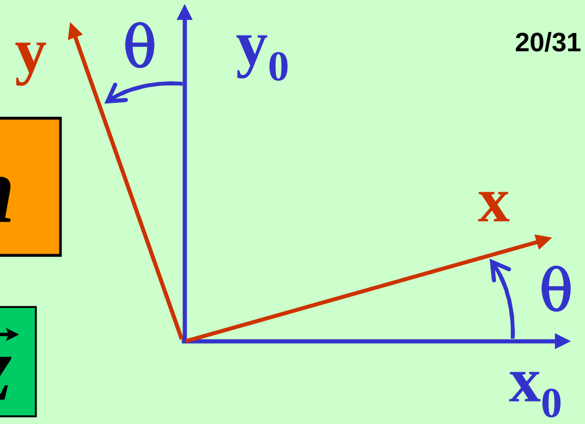
$$\boxed{\vec{0}}$$

Calcul dans R (le plus simple!) :



$$\overrightarrow{V_{G\in S/S_0}} = \vec{0} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/S_0}}$$

$$= \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ -c \end{bmatrix}_R \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_R = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ a.\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_R}$$



▷ Dérivation du vecteur position

$$\overrightarrow{V_{G\in S/S_0}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{/S_0} \qquad \overrightarrow{OG} = a.\vec{x} + c.\vec{z}$$

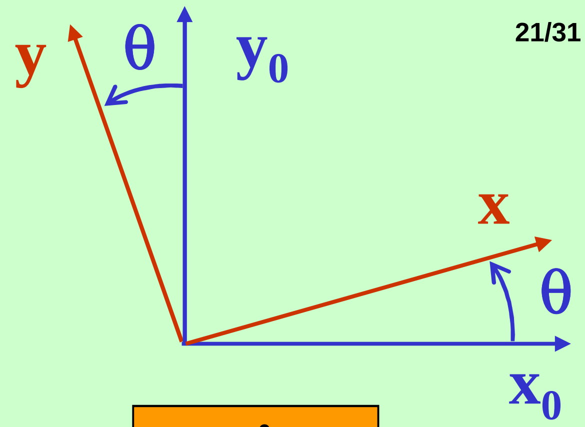
$$= a.\underbrace{\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{/R_0}}_{\dot{\theta}\,\vec{y}} + c.\cancel{\left(\frac{d\vec{z}}{dt}\right)_{/R_0}}^{\vec{0}} = \boxed{a.\dot{\theta}\,\vec{y}}$$

Formule de Bour
(ou de changement de base de dérivation).

Rappel :

$$\left(\frac{d\,\vec{U}}{dt}\right)_{/R_2} = \left(\frac{d\,\vec{U}}{dt}\right)_{/R_1} + \vec{U} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$$

D'où le calcul de l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/S_0}}$



$$\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/S_0}} = \left[\frac{d\left[a.\dot{\theta}.\vec{y}\right]}{dt}\right]_{/S_0}$$

$-\dot{\theta}\,\vec{x}$

Une seule méthode :
dérivation du vecteur vitesse.

$$= a.\ddot{\theta}.\vec{y} + a.\dot{\theta}.\left(\frac{d\,\vec{y}}{dt}\right)_{/S_0}$$

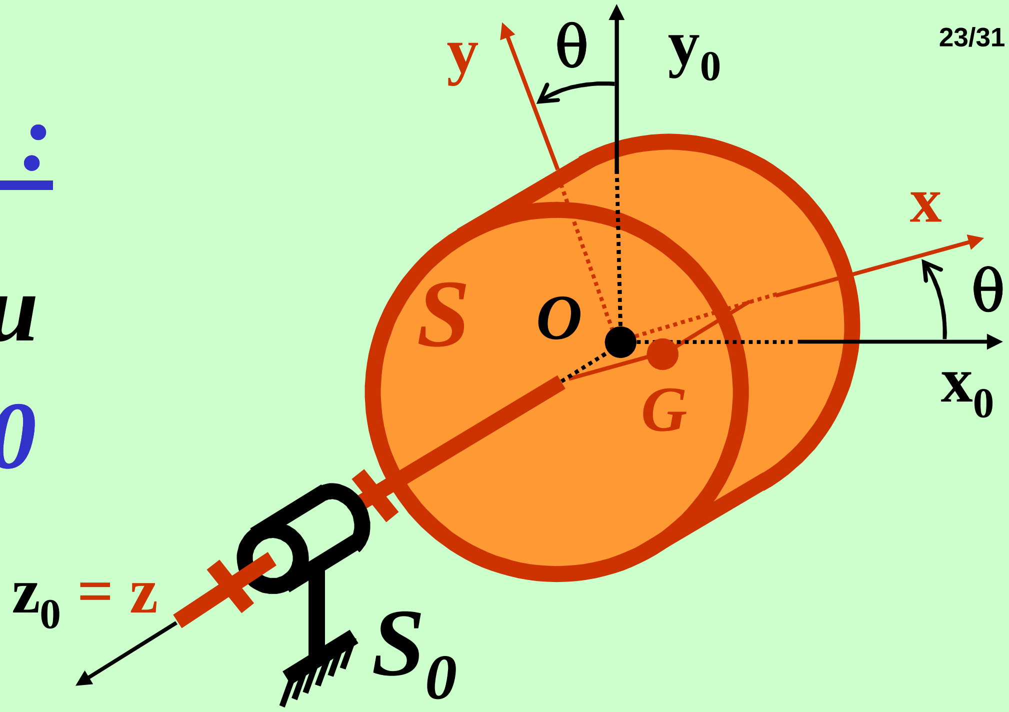
$$= \boxed{a.\ddot{\theta}.\vec{y} - a.\dot{\theta}^2.\vec{x}}$$

D'où la résultante dynamique :

$$m.\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/S_0}} = m.\begin{bmatrix} -a.\dot{\theta}^2 \\ a.\ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_R$$

Il est toujours temps (<u>après</u>!) de projeter dans une autre base

Moment dynamique :



***O* est un point fixe du mouvement de *S / S0* donc :**

$$\overrightarrow{\delta_O}(S/S_0) = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_O}(S/S_0)\right]_{/S_0}$$

avec

$$\overrightarrow{\sigma_O}(S/S_0) = \tilde{I}(O,S) \times \overrightarrow{\Omega}(S/S_0)$$

Rappel pour un point A quelconque :

Formules générales

Moment cinétique

$$\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = I(A,S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}$$

Moment dynamique

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}\right)_{/R} + \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}$$

Vitesse du point géométrique !

Calcul du moment cinétique

$$\overrightarrow{\sigma_O}(S/S_0) = \tilde{I}(O,S) \times \overrightarrow{\Omega}(S/S_0)$$

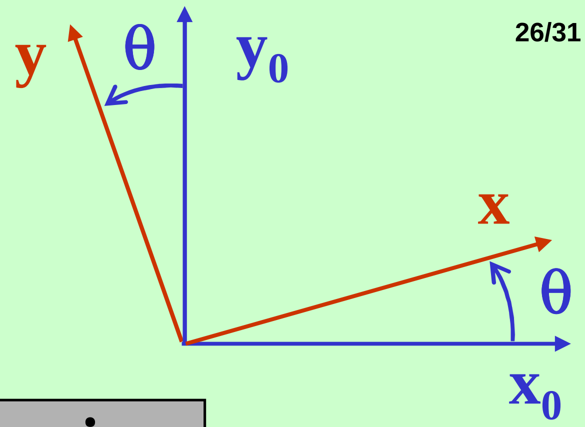
Car ***O*** est un point fixe du mouvement.

$$= \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_R \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_R$$

$$= \boxed{\begin{bmatrix} -E.\dot{\theta} \\ -D.\dot{\theta} \\ C.\dot{\theta} \end{bmatrix}_R}$$

Bien vérifier que ce soient les mêmes bases !

D’où le moment dynamique :



$$\overrightarrow{\delta_O}(S/S_0) = \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\overrightarrow{\sigma_O}(S/S_0)}_{\boxed{-E.\dot{\theta}\,\vec{x} - D.\dot{\theta}\,\vec{y} + C.\dot{\theta}\,\vec{z}}}\Big]_{/S_0}$$

Car $\boldsymbol{O}$ est un point fixe du mouvement.

$$= -E.\ddot{\theta}\,\vec{x} - E.\dot{\theta}.\underbrace{\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{/R_0}}_{\dot{\theta}\,y}$$

$$- D.\ddot{\theta}\,\vec{y} - D.\dot{\theta}.\underbrace{\left(\frac{d\vec{y}}{dt}\right)_{/R_0}}_{-\dot{\theta}\,\vec{x}}$$

$$+ C.\ddot{\theta}\,\vec{z} + C.\dot{\theta}.\underbrace{\cancel{\left(\frac{d\vec{z}}{dt}\right)_{/R_0}}}_{\vec{0}}$$

Soit finalement :

$$\overrightarrow{\delta_O}(S/S_0) = \begin{bmatrix} -E.\ddot{\theta} + D.\dot{\theta}^2 \\ -D.\ddot{\theta} - E.\dot{\theta}^2 \\ C.\ddot{\theta} \end{bmatrix}_R$$

Il est toujours temps (<u>après</u>!) de projeter dans une autre base

Synthèse des résultats

4- Résultats :

On prendrait la base mobile ***R***
on arriverait aux mêmes conclusions.

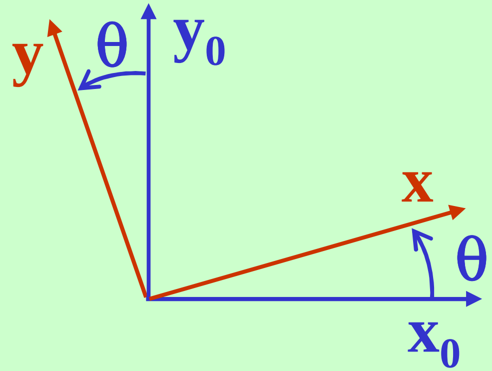
Choisissons la base R_0 pour déterminer les efforts au palier consécutifs de la rotation du rotor S.

Torseur dynamique dans R

$$\left\{ \begin{bmatrix} -a.m.\dot{\theta}^2 \\ a.m.\ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_R \begin{bmatrix} -E.\ddot{\theta}+D.\dot{\theta}^2 \\ -D.\ddot{\theta}-E.\dot{\theta}^2 \\ C.\ddot{\theta} \end{bmatrix}_R \right\}$$

Torseur dynamique dans R_0

$$\left\{ \begin{bmatrix} -a\,m\,\dot{\theta}^2 \\ a\,m\,\ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_R \begin{bmatrix} -E\,\ddot{\theta} + D\,\dot{\theta}^2 \\ -D\,\ddot{\theta} - E\,\dot{\theta}^2 \\ C\,\ddot{\theta} \end{bmatrix}_R \right\}$$



Résultante

$$m.a.\begin{bmatrix} -\ddot{\theta}.\sin\theta - \dot{\theta}^2.\cos\theta \\ \ddot{\theta}.\cos\theta - \dot{\theta}^2.\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0}$$

Moment

$$\begin{bmatrix} (-E.\ddot{\theta} + D.\dot{\theta}^2).\cos\theta + (D.\ddot{\theta} + E.\dot{\theta}^2).\sin\theta \\ (-E.\ddot{\theta} + D.\dot{\theta}^2).\sin\theta - (D.\ddot{\theta} + E.\dot{\theta}^2).\cos\theta \\ C.\ddot{\theta} \end{bmatrix}_{R_0}$$

D'où les six équations suivantes :

poids

pivot

moteur

torseur dynamique

$$\left\{\begin{array}{lllll} 0 & +X & +0 & = & -m.a.\ddot{\theta}.\sin\theta - m.a.\dot{\theta}^2.\cos\theta \\ -mg & +Y & +0 & = & m.a.\ddot{\theta}.\cos\theta - m.a.\dot{\theta}^2.\sin\theta \\ 0 & +Z & +0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} cmg & +L & +0 & = & (-E\ddot{\theta}+D\dot{\theta}^2)\cos\theta+(D\ddot{\theta}+E\dot{\theta}^2)\sin\theta \\ 0 & +M & +0 & = & (-E\ddot{\theta}+D\dot{\theta}^2)\sin\theta-(D\ddot{\theta}+E\dot{\theta}^2)\cos\theta \\ -amg\cos\theta & +0 & +C_m & = & C\ddot{\theta} \end{array}\right.$$

Ce qu'il faut avoir retenu
(minimum « vital »…)

- Savoir que la rotation d'une pièce peut engendrer (si on n'y fait pas attention) des vibrations d'où des usures rapides, du bruit et une gêne éventuelle.
- Savoir appliquer un ***PFD*** à une pièce en rotation avec son centre de gravité désaxé pour en déduire les efforts dynamiques transmis au palier par le biais de la liaison pivot.