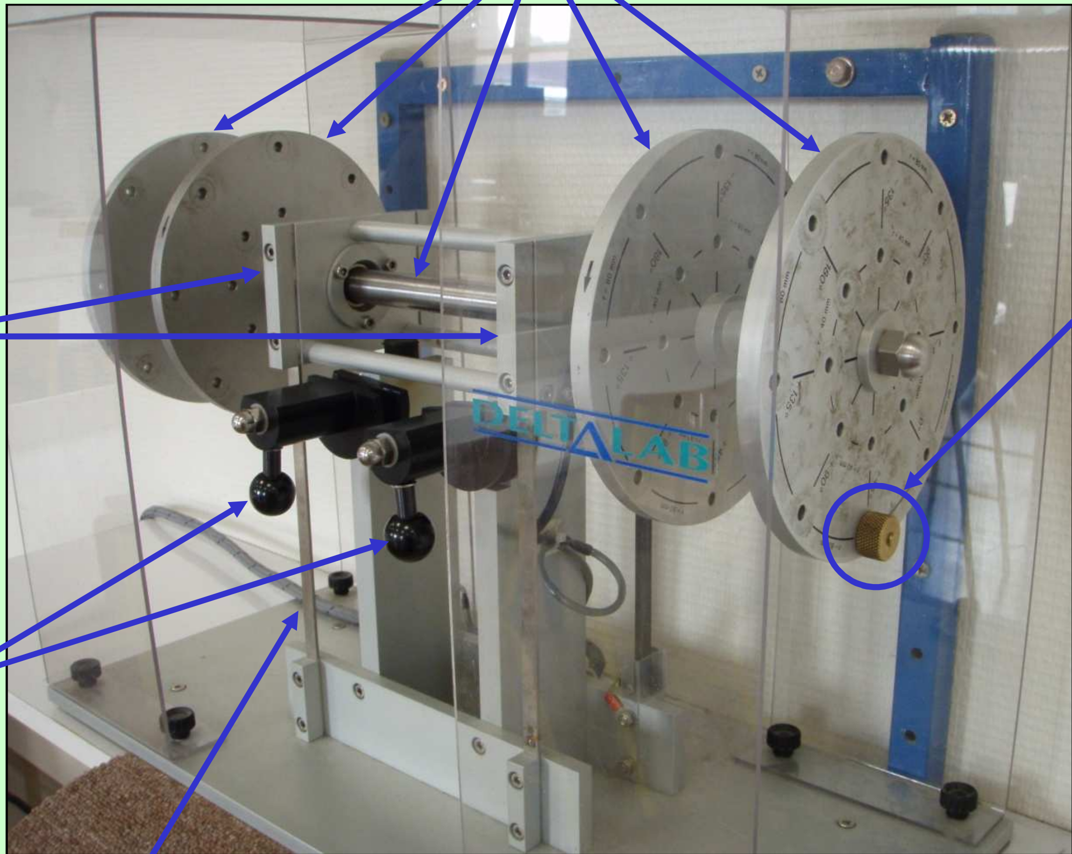

EQUILIBRAGE
des corps tournants


Quel est le problème ?

Ensemble en rotation (rotor + 4 plateaux) parfaitement équilibré initialement



Deux paliers

Masse de déséquilibrage (60 g)

Poignées de libération des paliers

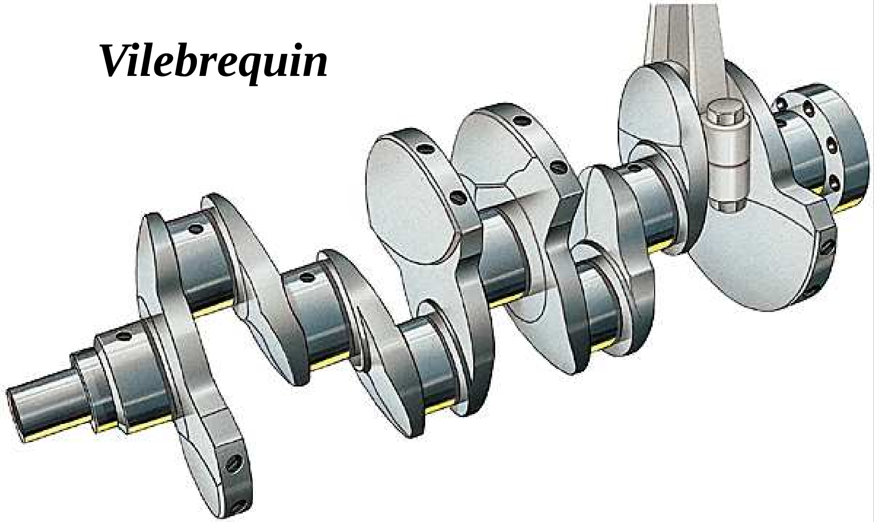
Lame élastique

Exemples de pièces où le problème des vibrations se pose…

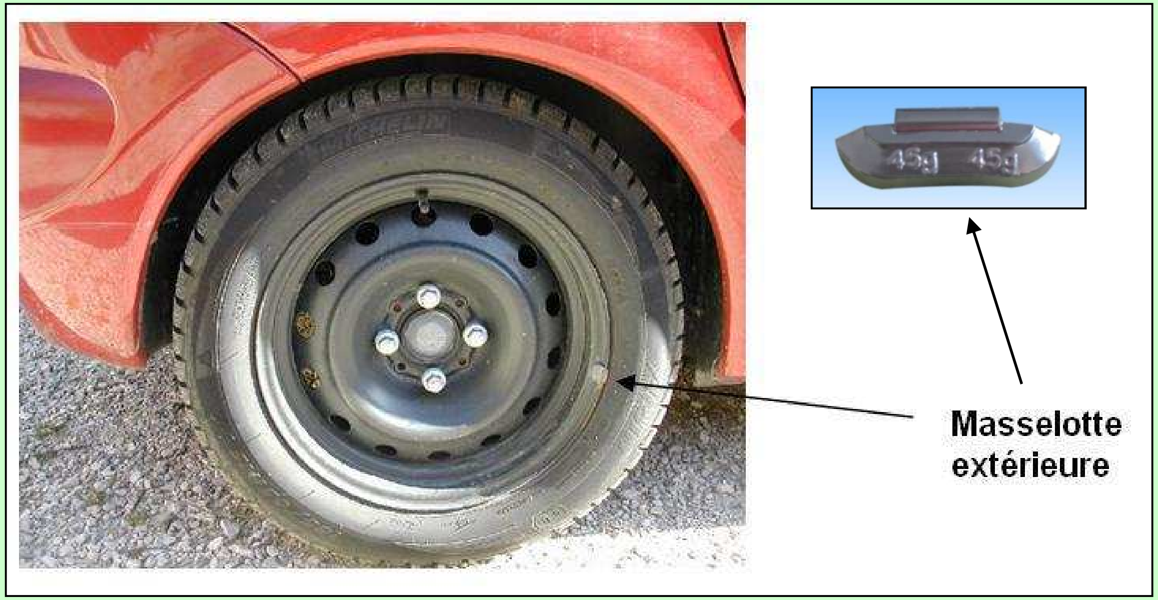
Arbre d'alternateur

Turbine Pelton

Vilebrequin



Problème des vibrations sur les roues de voiture



<u>Equilibreuse</u>

<u>pour garagiste</u>

I- PROBLEME POSE

La rotation de solides autour d'un axe fixe génère souvent des vibrations entraînant :

☞ ***Détérioration rapide des paliers (chocs, fatigue)***

☞ ***Bruit***

☞ ***Gêne éventuelle pour l 'utilisateur***
→ ***volant de voiture***

Le but du mécanicien est donc de faire en sorte que ces corps tournants n'engendrent pas de vibrations.

II- ETUDE THEORIQUE

Cette étude va se faire en deux temps :

1er temps

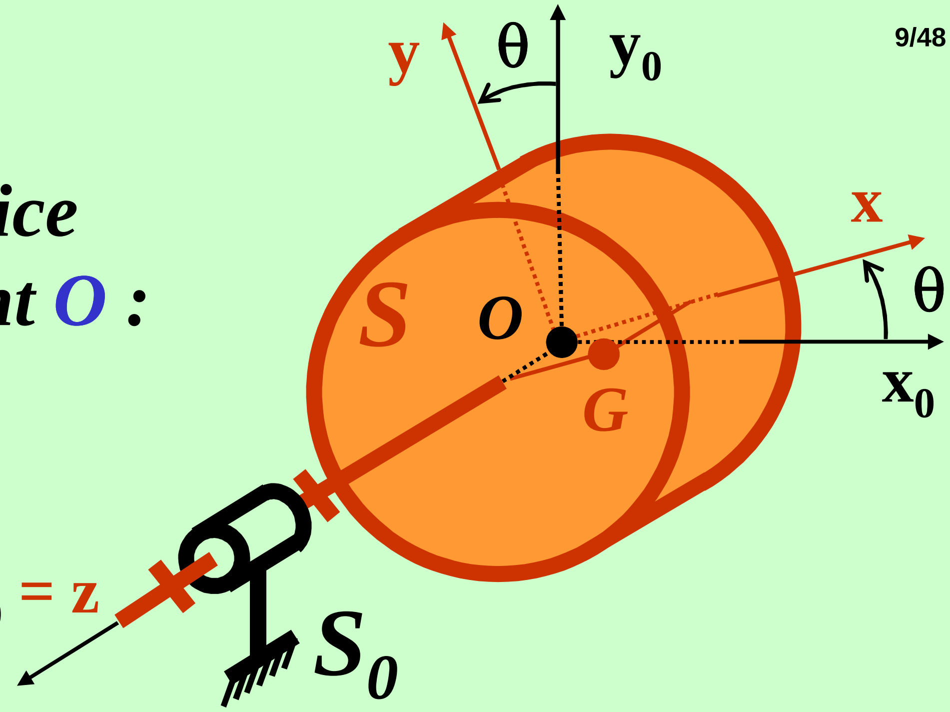
- calcul des efforts supportés par le palier S_0 lors de la rotation du solide S autour de l'axe de rotation $O\vec{z}_0$

2ème temps

- recherche des moyens théoriques pour rendre constants ces efforts et éviter ainsi toute vibration.


1er temps → PFD

a) Hypothèses :



On suppose connue la matrice d'inertie du solide S au point O :

$$I(O,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_R$$

$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à la pièce

Ainsi que la position du centre de gravité :

$$\overrightarrow{OG} = a.\vec{x} + c.\vec{z}$$

b) Calculs :

► ***1- Ensemble isolé :***

solide S (celui qui tourne!)

► ***2- Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) :***

pesanteur

pivot

moteur

3- Application du PFD :

Pour le mouvement de S par rapport à S_0 avec écriture des moments au point O

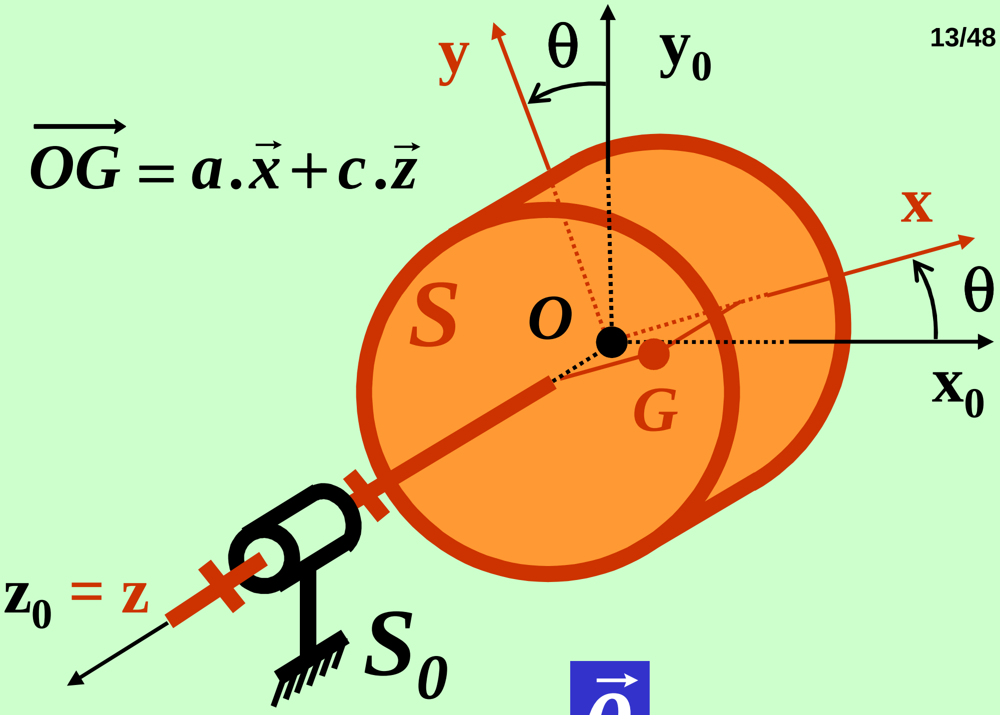
point fixe pour S / S_0

Utilisation de l'outil torseur pour obtenir six équations


Mise en place des
3 torseurs d’effort
écrits en O

Torseur de l'action de la pesanteur

$$\left\{\mathsf{F}_{pes\rightarrow S}\right\}_G$$



$$= \left\{ -m.g\,\vec{y}_0 \;;\; \vec{0} \right\}_G$$

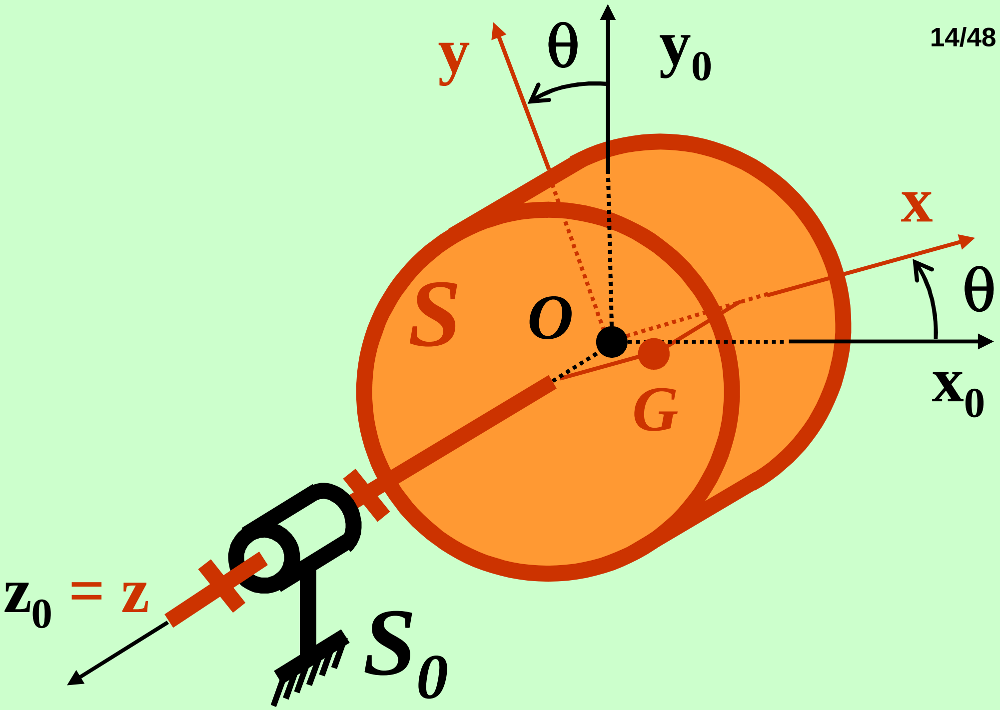
Moment en O :

$$\overrightarrow{M_O} = \cancel{\overrightarrow{M_G}}^{\,\vec{0}} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{R}$$

$$= \begin{bmatrix} a.\cos\theta \\ a.\sin\theta \\ c \end{bmatrix}_{R_0} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} = \boxed{\begin{bmatrix} cmg \\ 0 \\ -amg\cos\theta \end{bmatrix}_{R_0}}$$

Torseur de l'action du bâti (pivot)

$$\left\{ \mathsf{F}_{b\hat{a}ti \rightarrow S} \right\}_O$$



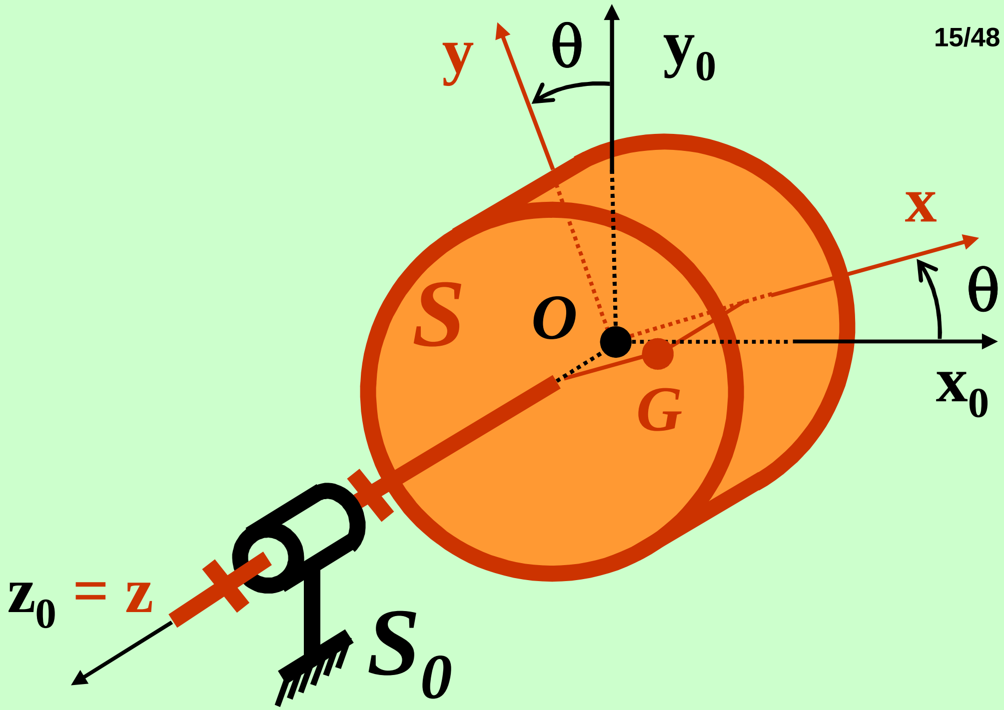
$$\left\{ \mathsf{F}_{b\hat{a}ti \rightarrow S} \right\}_O = \left\{ \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} L \\ M \\ 0 \end{bmatrix} \right\}_{O,\, R_0}$$

Vrai en tout point de l'axe de rotation

Même forme dans R

Torseur de l'action du moteur

$$\left\{ \mathcal{F}_{mot \rightarrow S} \right\}_O$$



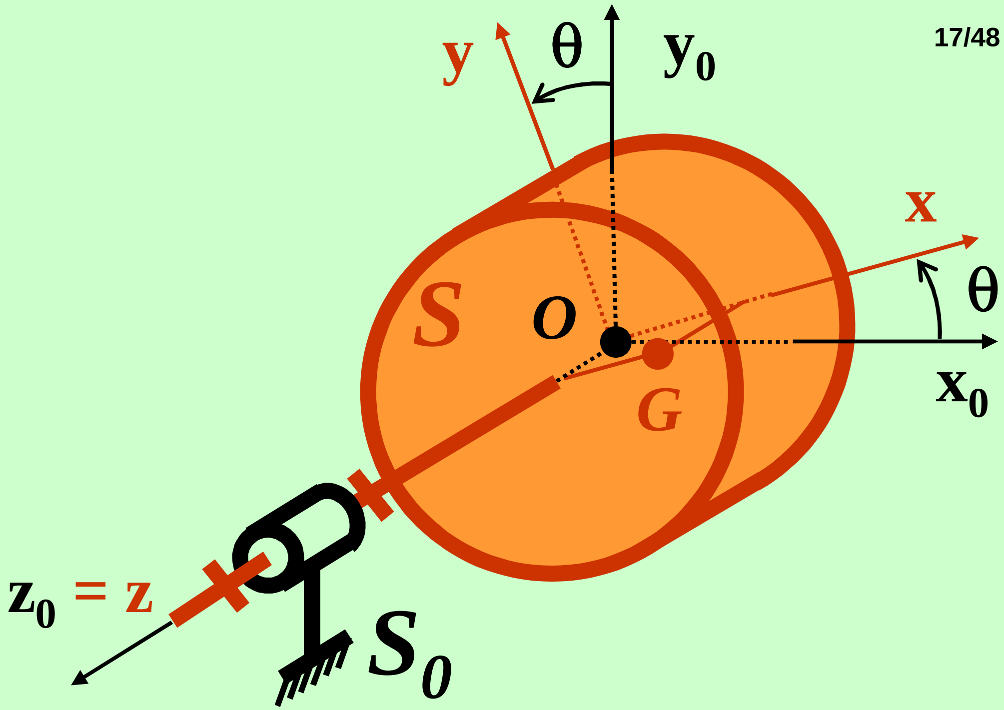
$$\left\{ \mathcal{F}_{mot \rightarrow S} \right\}_O = \boxed{\left\{ \vec{0} \; ; \; C_m \, \overrightarrow{z_0} \right\}_{O,R_0}}$$

ou R

Vrai en tout point de l'axe de rotation


Mise en place du
torseur dynamique
écrit en O

Torseur dynamique en 0 de S / S_0



Résultante dynamique :

$$m \times \overrightarrow{\Gamma_{G \in S / S_0}} = \boxed{m \times \left(\frac{d \left[\overrightarrow{V_{G \in S / S_0}} \right]}{d\,t} \right)_{/S_0}}$$

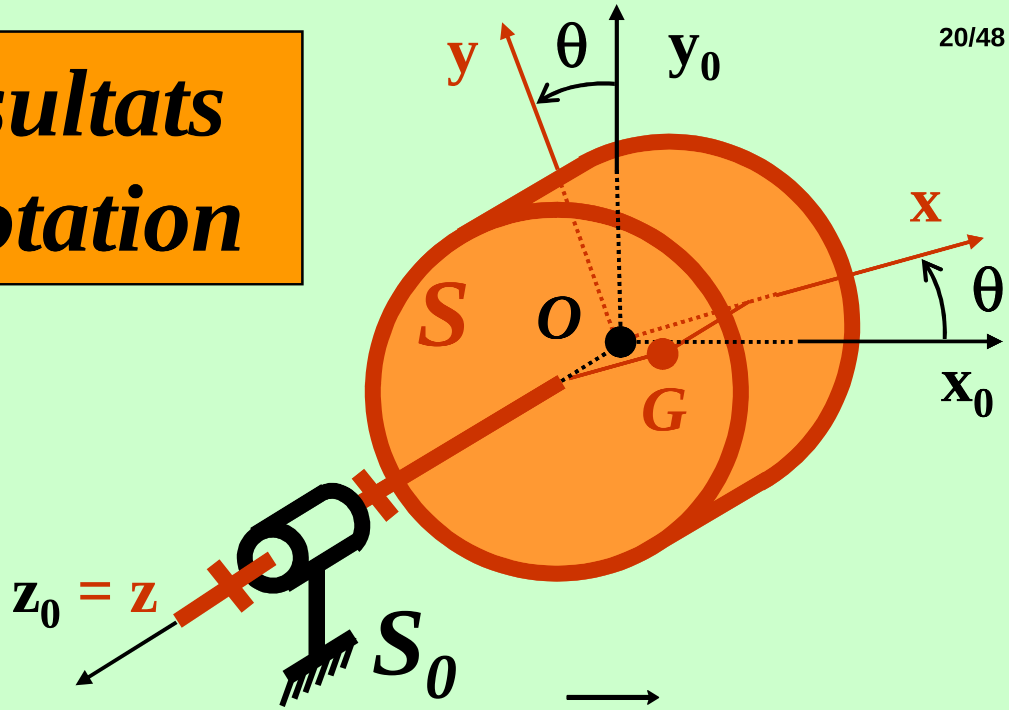

Calcul de la vitesse

Calcul de la vitesse : $\overrightarrow{V_{G \in S / S_0}}$

Trois méthodes possibles :

- ☞ **Utilisation des résultats du mouvement de rotation**
- ☞ **Changement de point**
- ☞ **Dérivation du vecteur position**

▷ Utilisation des résultats du mouvement de rotation



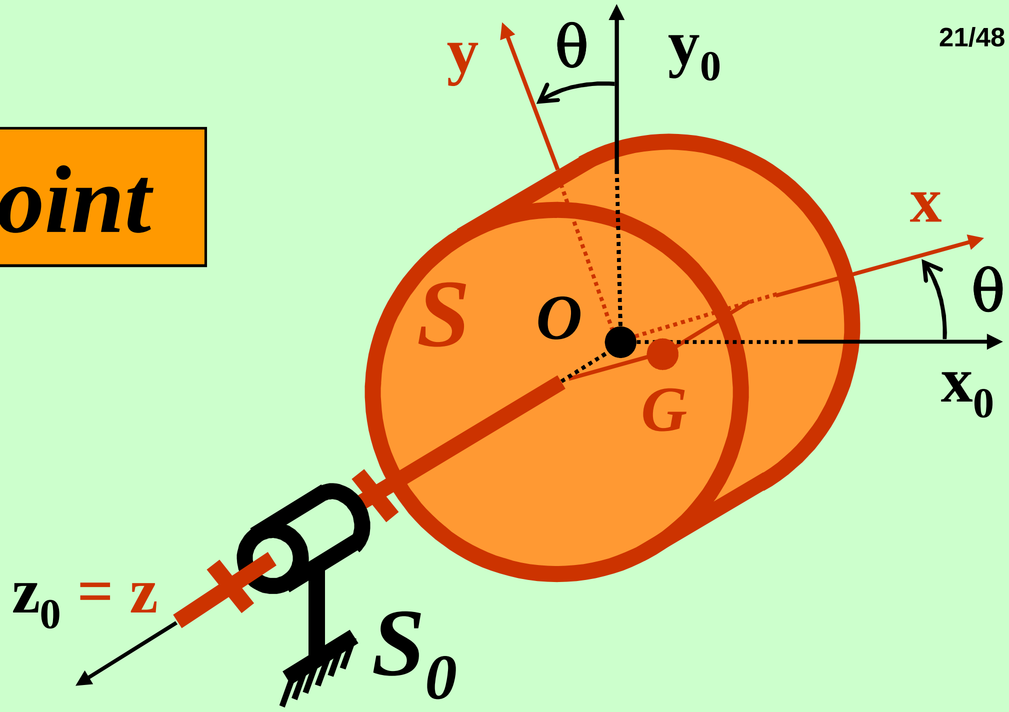
$$" V = R.\omega "$$

$$\overrightarrow{OG} = a.\vec{x} + c.\vec{z}$$

d'où avec les notations de l 'énoncé :

$$\overrightarrow{V_{G\in S/S_0}} = a.\dot{\theta}.\vec{y}$$

▷ Changement de point

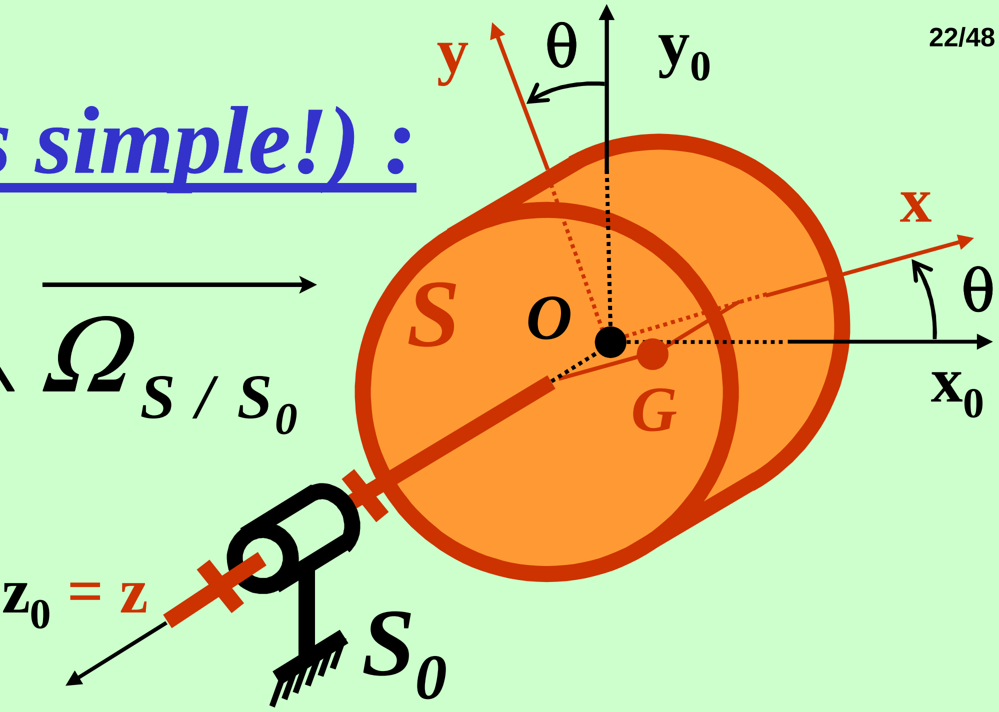


en passant par O

$$\overrightarrow{V_{G\in S/S_0}} = \cancel{\overrightarrow{V_{O\in S/S_0}}} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/S_0}}$$

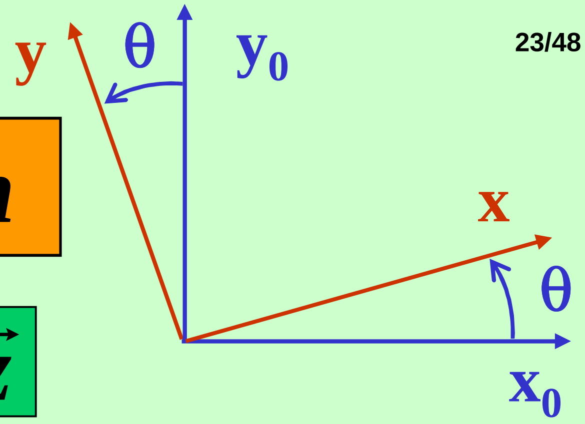
$$\boxed{\vec{0}}$$

Calcul dans R (le plus simple!) :



$$\overrightarrow{V_{G\in S/S_0}} = \vec{0} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/S_0}}$$

$$= \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ -c \end{bmatrix}_R \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_R = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ a.\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_R}$$



▷ Dérivation du vecteur position

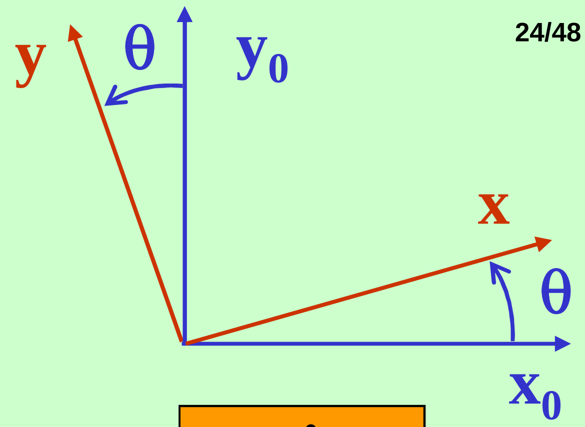
$$\overrightarrow{V_{G\in S/S_0}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{/S_0} \qquad \overrightarrow{OG} = a.\vec{x}+c.\vec{z}$$

$$= a.\underbrace{\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{/R_0}}_{\dot{\theta}\,\vec{y}} + c.\cancelto{\vec{0}}{\left(\frac{d\vec{z}}{dt}\right)_{/R_0}} = \boxed{a.\dot{\theta}\,\vec{y}}$$

Rappel :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/R_2} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/R_1} + \vec{U}\wedge\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$$

D'où le calcul de l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/S_0}}$



$$\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/S_0}} = \left[\frac{d\left[a.\dot{\theta}.\vec{y}\right]}{dt}\right]_{/S_0}$$

$$= a.\ddot{\theta}.\vec{y} + a.\dot{\theta}.\left(\frac{d\,\vec{y}}{dt}\right)_{/S_0}$$

$$-\dot{\theta}\,\vec{x}$$

$$= \boxed{a.\ddot{\theta}.\vec{y} - a.\dot{\theta}^2.\vec{x}}$$

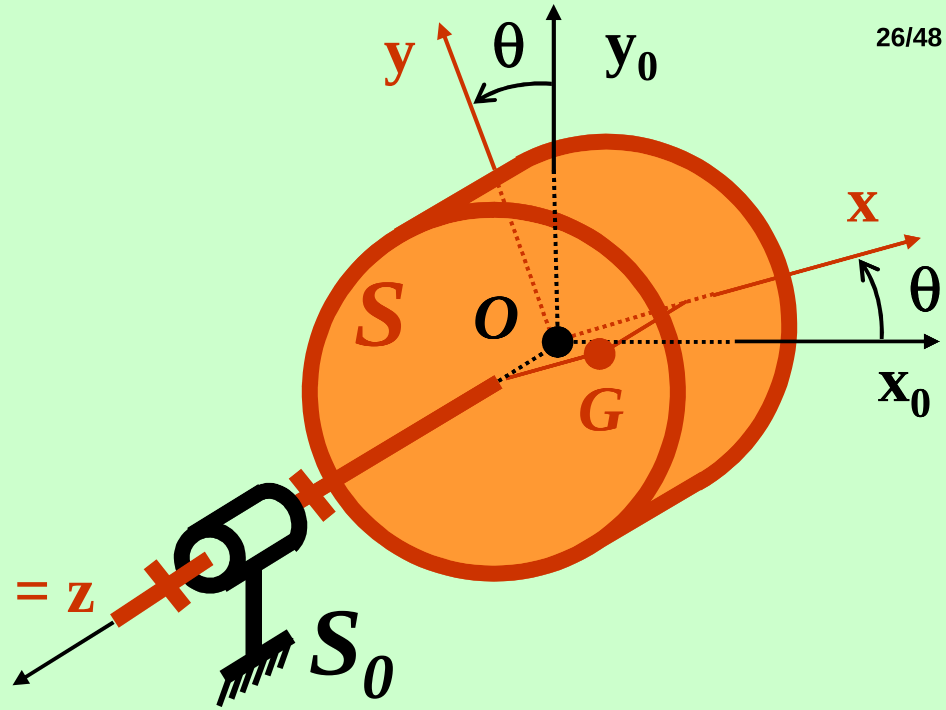
D'où la résultante dynamique :

$$m.\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/S_0}} = m.\begin{bmatrix} -a.\dot{\theta}^2 \\ a.\ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_R$$

Il est toujours temps (après!) de projeter dans une autre base

Moment dynamique :

***O* est un point fixe du mouvement de *S / S0* donc :**



$$\overrightarrow{\delta_O}(S/S_0) = \frac{d}{dt}[\overrightarrow{\sigma_O}(S/S_0)]_{/S_0}$$

avec

$$\overrightarrow{\sigma_O}(S/S_0) = \tilde{I}(O,S) \times \overrightarrow{\Omega}(S/S_0)$$

Rappel pour un point A quelconque :

Moment cinétique

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = I(A,S).\,\overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}}$$

Moment dynamique

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}\right)_{/R} + \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}$$

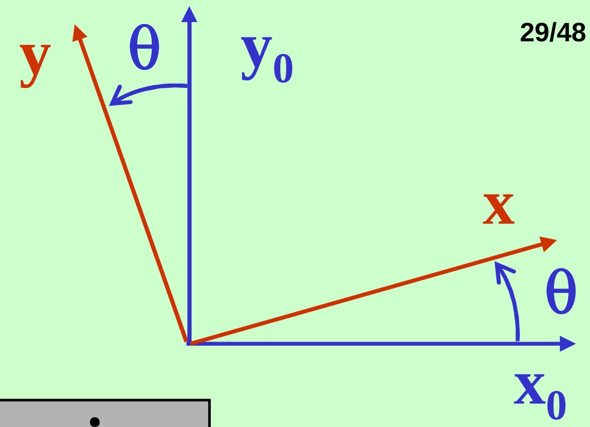
Calcul du moment cinétique

$$\overrightarrow{\sigma_O}(S/S_0) = \tilde{I}(O,S) \times \overrightarrow{\Omega}(S/S_0)$$

$$= \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_R \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_R$$

$$= \boxed{\begin{bmatrix} -E.\dot{\theta} \\ -D.\dot{\theta} \\ C.\dot{\theta} \end{bmatrix}_R}$$

D'où le moment dynamique :



$$\overrightarrow{\delta_O}(S/S_0) = \frac{d}{dt}[\underbrace{\overrightarrow{\sigma_O}(S/S_0)}_{\boxed{-E.\dot{\theta}\;\vec{x} - D.\dot{\theta}\;\vec{y} + C.\dot{\theta}\;\vec{z}}}]_{/S_0}$$

$$= -E.\ddot{\theta}\;\vec{x} - E.\dot{\theta}.\underbrace{\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{/R_0}}_{\boxed{\dot{\theta}\;y}}$$

$$- D.\ddot{\theta}\;\vec{y} - D.\dot{\theta}.\underbrace{\left(\frac{d\vec{y}}{dt}\right)_{/R_0}}_{\boxed{-\dot{\theta}\;\vec{x}}}$$

$$+ C.\ddot{\theta}\;\vec{z} + C.\dot{\theta}.\underbrace{\cancel{\left(\frac{d\vec{z}}{dt}\right)_{/R_0}}}_{\boxed{\vec{0}}}$$

Soit finalement :

$$\overrightarrow{\delta_O}(S/S_0) = \begin{bmatrix} -E.\ddot{\theta} + D.\dot{\theta}^2 \\ -D.\ddot{\theta} - E.\dot{\theta}^2 \\ C.\ddot{\theta} \end{bmatrix}_R$$

Il est toujours temps (<u>après</u>!) de projeter dans une autre base

Synthèse des résultats

4- Résultats :

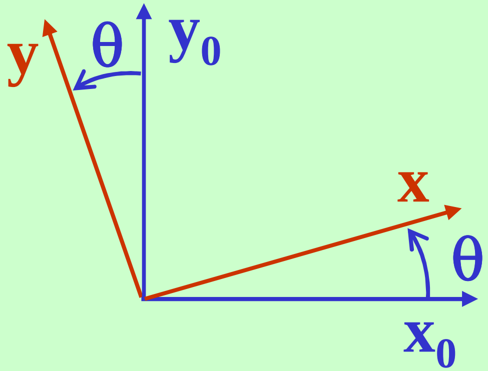
Choisissons la base R_0 pour déterminer les efforts au palier consécutifs de la rotation du rotor S

Torseur dynamique dans R

$$\left\{ \begin{bmatrix} -a.m.\dot{\theta}^2 \\ a.m.\ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_R \begin{bmatrix} -E.\ddot{\theta} + D.\dot{\theta}^2 \\ -D.\ddot{\theta} - E.\dot{\theta}^2 \\ C.\ddot{\theta} \end{bmatrix}_R \right\}$$

Torseur dynamique dans R_0

$$\begin{Bmatrix} \begin{bmatrix} -a\,m\,\dot{\theta}^2 \\ a\,m\,\ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_R & \begin{bmatrix} -E\,\ddot{\theta}+D\,\dot{\theta}^2 \\ -D\,\ddot{\theta}-E\,\dot{\theta}^2 \\ C\,\ddot{\theta} \end{bmatrix}_R \end{Bmatrix}$$



Résultante

$$m.a.\begin{bmatrix} -\ddot{\theta}.\sin\theta-\dot{\theta}^2.\cos\theta \\ \ddot{\theta}.\cos\theta-\dot{\theta}^2.\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0}$$

Moment

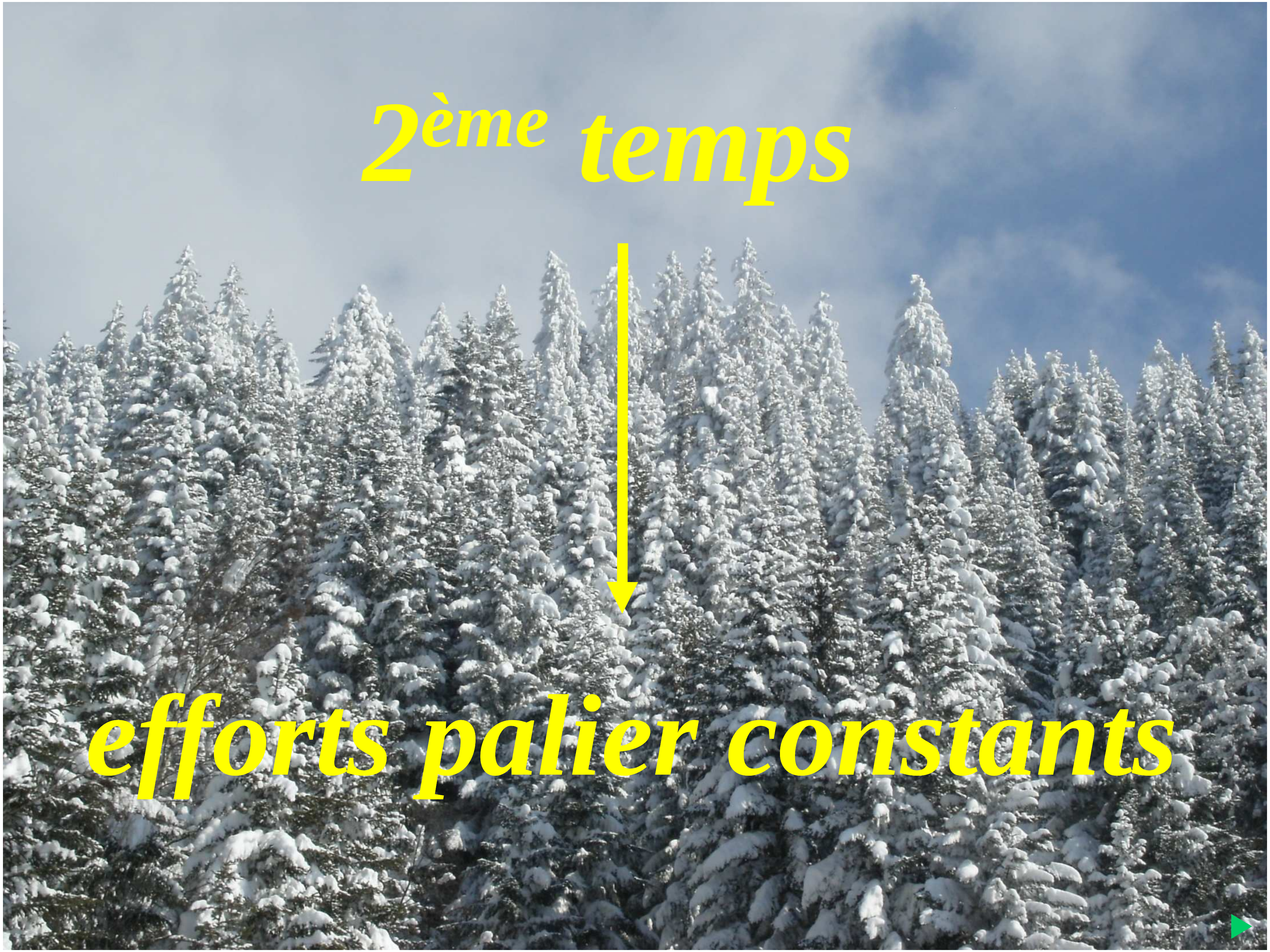
$$\begin{bmatrix} (-E.\ddot{\theta}+D.\dot{\theta}^2).\cos\theta+(D.\ddot{\theta}+E.\dot{\theta}^2).\sin\theta \\ (-E.\ddot{\theta}+D.\dot{\theta}^2).\sin\theta-(D.\ddot{\theta}+E.\dot{\theta}^2).\cos\theta \\ C.\ddot{\theta} \end{bmatrix}_{R_0}$$

D'où les six équations suivantes :

poids — pivot — moteur — torseur dynamique

$$\left\{\begin{array}{lllll} 0 & +X & +0 & = & -m.a.\ddot{\theta}.\sin\theta - m.a.\dot{\theta}^2.\cos\theta \\ -mg & +Y & +0 & = & m.a.\ddot{\theta}.\cos\theta - m.a.\dot{\theta}^2.\sin\theta \\ 0 & +Z & +0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} cmg & +L & +0 & = & (-E\ddot{\theta}+D\dot{\theta}^2)\cos\theta+(D\ddot{\theta}+E\dot{\theta}^2)\sin\theta \\ 0 & +M & +0 & = & (-E\ddot{\theta}+D\dot{\theta}^2)\sin\theta-(D\ddot{\theta}+E\dot{\theta}^2)\cos\theta \\ -amg\cos\theta & +0 & +C_m & = & C\ddot{\theta} \end{array}\right.$$


2ème temps
efforts palier constants

Efforts supportés par le palier :

$$\left\{\begin{array}{ll} X & = -m.a.\ddot{\theta}.\sin\theta - m.a.\dot{\theta}^2.\cos\theta \\ Y & = \quad m.a.\ddot{\theta}.\cos\theta - m.a.\dot{\theta}^2.\sin\theta + m\,g \\ Z & = \qquad\qquad\qquad 0 \\ L & = (-E\,\ddot{\theta} + D\dot{\theta}^2)\cos\theta + (D\ddot{\theta} + E\,\dot{\theta}^2)\sin\theta - cmg \\ M & = (-E\,\ddot{\theta} + D\dot{\theta}^2)\sin\theta - (D\ddot{\theta} + E\,\dot{\theta}^2)\cos\theta \end{array}\right.$$

Pour éviter toute vibration, cherchons à rendre ces 5 composantes constantes dans le temps et ceci pour toute vitesse et toute accélération :

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} a = 0 \\ D = E = 0 \end{array}}$$


Conclusion

$a = 0$

Le centre de gravité est sur l'axe de rotation

équilibrage <u>statique</u>

$D = 0$

$E = 0$

L'axe de rotation est axe principal d'inertie

équilibrage <u>dynamique</u>

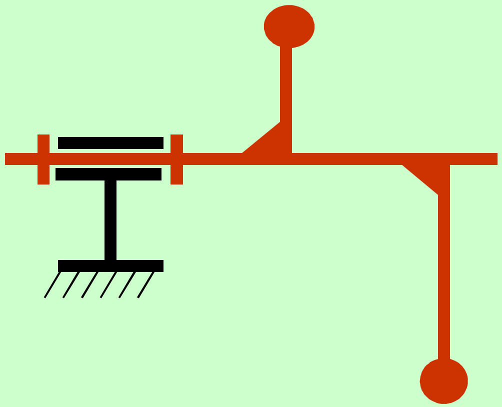
Nota :

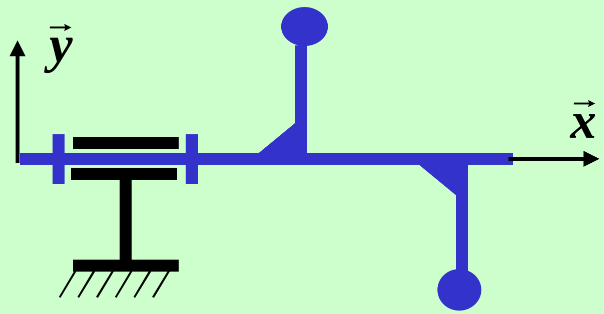
☞ ***Un solide peut être équilibré statiquement sans l'être dynamiquement.***

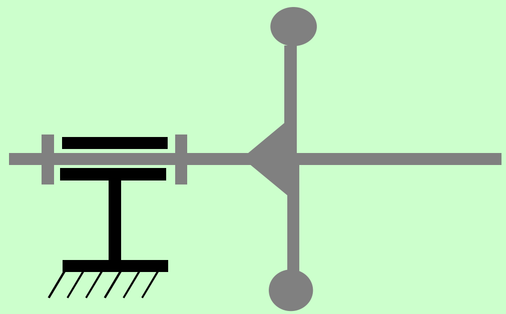
☞ ***L'inverse est faux : un solide équilibré dynamiquement l'est obligatoirement statiquement.***

☞ ***L'équilibrage statique correspond à un équilibre indifférent du solide autour de son axe de rotation.***

Exemples de solides :







Non équilibré

Equilibrage statique seul

Equilibrage statique et dynamique

G n'est pas sur l 'axe de rotation donc pas d'équilibrage statique (ni dynamique)

2 plans de symétrie donc ***D=E=F=0***

Il faudrait ***E=F=0*** et on a ***D=E=0*** (***xOy*** plan de symétrie)


Comment équilibrer ?

III- EQUILIBRAGE PAR AJOUT DE MASSES

a) Principe d'équilibrage :

L'idée consiste à rajouter deux masses ponctuelles m_1 et m_2.

Soient G_1 ,G_2 les centres de gravité relatifs à ces deux masses :

$$\boxed{\overrightarrow{OG_1} = a_1.\vec{x} + b_1.\vec{y} + c_1.\vec{z}} \qquad \boxed{\overrightarrow{OG_2} = a_2.\vec{x} + b_2.\vec{y} + c_2.\vec{z}}$$

Equilibrer le solide S avec ces deux masses revient donc à déterminer les huit inconnues suivantes :

$$m_1 \quad m_2 \quad a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad a_2 \quad b_2 \quad c_2$$

Cas des roues de voiture

Rajout de deux masselottes sur la périphérie de la jante (une côté intérieur et une côté extérieur)

b) Equilibrage statique :

Le centre de gravité G' de l'ensemble $\{ S + m_1 + m_2 \}$ doit être sur l'axe de rotation d'où deux équations :

G' sur l'axe de rotation →

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{m.\overrightarrow{OG} + m_1.\overrightarrow{OG_1} + m_2.\overrightarrow{OG_2}}{m + m_1 + m_2}$$

$$\begin{cases} \text{projection sur } O\vec{x} \longrightarrow & m.a + m_1.a_1 + m_2.a_2 = 0 \\ \text{projection sur } O\vec{y} \longrightarrow & 0 + m_1.b_1 + m_2.b_2 = 0 \end{cases}$$

c) Equilibrage dynamique :

L'axe $O\vec{z_0}$ *doit être axe principal d'inertie de l'ensemble* $\{ S + m1 + m2 \}$

⇒ ***deux équations*** ***supplémentaires :***

$$\begin{cases} D' = 0 \rightarrow & D + m_1.b_1.c_1 + m_2.b_2.c_2 = 0 \\ E' = 0 \rightarrow & E + m_1.a_1.c_1 + m_2.a_2.c_2 = 0 \end{cases}$$

d) Conclusion :

Quatre équations pour huit inconnues

↓

Infinité de solutions donc de possibilités d'équilibrage

↓

Possibilité de se fixer quatre inconnues au départ

Remarques :

☞ une seule masse est insuffisante,
en effet si $m_2 = 0$

équation n° 2 ⟶ $m_1.b_1 + \cancel{m}_2.b_2 = 0$ ⟶ $\boxed{b_1 = 0}$

équation n° 3 ⟶ $D + m_1.\cancel{b}_1.c_1 + \cancel{m}_2.b_2.c_2 = 0$

⟶ $\boxed{D = 0\ !!!}$

☞ Il faut connaître (ou mesurer) les termes D et E de la matrice d'inertie du solide initial.

☞ Au lieu d'ajouter deux masses on peut les enlever par perçage, il suffit alors de considérer des masses négatives.


FIN