ENERGETIQUE

1) *Energie cinétique*

2) *Puissance extérieure*

3) *Puissance intérieure*

4) *Théorème de l'énergie cinétique (TEC)*

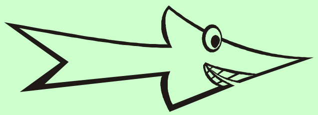
1) ENERGIE CINETIQUE

a) Définition :

On appelle énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport au repère R_g, la quantité scalaire :

$$T(S/R_g) = \frac{1}{2}\int_S \left(\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\right)^2 \times dm$$

L'unité est le Joule : « J »



$kg \cdot m^2 / s^2$

b) Autre expression :

$$T_{S/R_g} = \frac{1}{2}\int_S \left(\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\right)^2 \times dm$$

$$\Rightarrow T_{S/R_g} = \frac{1}{2}\int_S \left(\boxed{\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}}\,.\,\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\right)\times dm$$

Formule de changement de point

$$= \frac{1}{2}\int_S \left(\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}} + \overrightarrow{MG}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}\right).\,\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\times dm$$

En développant

$$= \frac{1}{2}\int_S \overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}\,.\,\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\times dm + \frac{1}{2}\int_S \left(\boxed{\overrightarrow{MG}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}}\right).\,\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\times dm$$

Propriété du produit mixte

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}\,.\,\boxed{\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\times dm} + \frac{1}{2}\int_S \left(\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\wedge\overrightarrow{MG}\right).\,\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}\times dm$$

Résultante cinétique

$$T_{S/R_g} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}\,.\boxed{\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}} \times dm}$$

$$+\frac{1}{2}\int_S \left(\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}} \wedge \overrightarrow{MG}\right).\,\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \times dm$$

$$= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}\,.\,m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}$$

Résultante cinétique

$$+\frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}\,.\int_S \boxed{\left(\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}} \wedge \overrightarrow{MG}\right)} \times dm$$

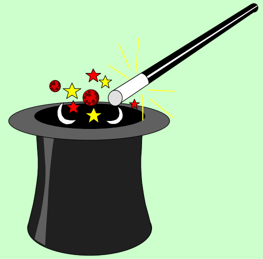
Moment cinétique $\int_S \boxed{\left(\overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\right)} \times dm$

d'où

$$\boldsymbol{T(S/R_g) = \frac{1}{2}\,m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}^{2} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}\,.\,\overrightarrow{\sigma_G(S/R_g)}}$$

c) Utilisation de l'outil torseur :

En fait on a le résultat (plus simple à mémoriser) suivant :



$$T(S/R_g) = \frac{1}{2}\underbrace{\left\{\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \,;\, \overrightarrow{V_{A\in S/R_g}}\right\}_A}_{\text{Torseur cinématique}} \otimes \underbrace{\left\{m.\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}} \,;\, \overrightarrow{\sigma_A(S/R_g)}\right\}_A}_{\text{Torseur cinétique}}$$

☺☺☺

Comoment

☠ - *même point, même base.*
- *peu importe le point d'écriture.*

Comoment de deux torseurs

$$\left\{ \overrightarrow{R_1}\,;\ \overrightarrow{M_1(A)} \right\}_A \otimes \left\{ \overrightarrow{R_2}\,;\ \overrightarrow{M_2(A)} \right\}_A$$

$$\boxed{\overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{M_2(A)} + \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{M_1(A)}}$$

Si calcul en B

$$\left\{ \overrightarrow{R_1}\,;\ \overrightarrow{M_1(B)} \right\}_B \otimes \left\{ \overrightarrow{R_2}\,;\ \overrightarrow{M_2(B)} \right\}_B = \overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{M_2(B)} + \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{M_1(B)}$$

$$= \overrightarrow{R_1} \cdot \left(\overrightarrow{M_2(A)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_2} \right) + \overrightarrow{R_2} \cdot \left(\overrightarrow{M_1(A)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_1} \right)$$

$$= \overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{M_2(A)} + \cancel{\overrightarrow{R_1} \cdot \left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_2} \right)} + \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{M_1(A)} + \boxed{\overrightarrow{R_2} \cdot \left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_1} \right)}$$

$$= \boxed{\overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{M_2(A)} + \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{M_1(A)}}$$

$$\cancel{\overrightarrow{R_1} \cdot \left(\overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{BA} \right)}$$

Vérification de l'expression générale à partir du comoment des deux torseurs (cinématique et cinétique)

Écrivons les moments en G :

$$\underbrace{\frac{1}{2}}\left\{\underbrace{\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}}\,;\underbrace{\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}}\right\}_G \otimes \left\{\underbrace{m.\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}}\,;\underbrace{\overrightarrow{\sigma_G(S/R_g)}}\right\}_G$$

$$\frac{1}{2}\,m\,\underbrace{\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}\cdot\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}}_{\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}^{\,2}} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}\cdot\overrightarrow{\sigma_G(S/R_g)}$$

d) Cas particuliers :

1er cas : mouvement d'un solide autour d'un point fixe A.

Écrivons les moments en ce point fixe A :

$$\frac{1}{2}\left\{\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} ; \underbrace{\cancel{\overrightarrow{V_{A\in S/R_g}}}}_{\vec{0}}\right\}_A \otimes \left\{\overrightarrow{m.V_{G\in S/R_g}} ; \overrightarrow{\sigma_A(S/R_g)}\right\}_A$$

finalement :

$$T(S/R_g) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \cdot \underbrace{\overrightarrow{\sigma_A(S/R_g)}}_{\tilde{I}(A,S)\times\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}}$$

Car A est point fixe du mouvement S/R_g

$2^{\text{ème}}$ cas : rotation d'un solide autour d'un axe fixe $A\vec{x}$.

Le vecteur rotation est supposé être le suivant :

$$\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} = \omega\,\vec{x} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(S/R_g) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \cdot \underbrace{\overrightarrow{\sigma_A(S/R_g)}}$$

$$\tilde{I}(A,S) \times \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} = \begin{bmatrix} J_{A\vec{x}} & -F & -E \\ -F & J_{A\vec{y}} & -D \\ -E & -D & J_{A\vec{z}} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{A\vec{x}} \times \omega \\ -F \times \omega \\ -E \times \omega \end{pmatrix}$$

Car A est point fixe du mouvement S/R_g

$$\boxed{T(S/R_g) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \cdot \underbrace{\overrightarrow{\sigma_A(S/R_g)}}_{\begin{pmatrix} J_{A\vec{x}} \times \omega \\ -F \times \omega \\ -E \times \omega \end{pmatrix}}}$$

soit :

$$T(S/R_g) = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} J_{A\vec{x}} \times \omega \\ -F \times \omega \\ -E \times \omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times J_{A\vec{x}} \times \omega^2$$

$$\Rightarrow \boxed{T(S/R_g) = \frac{1}{2} J_{A\vec{x}} \times \omega^2}$$

Moment d'inertie de S autour de $A\vec{x}$

3ème cas : translation d'un solide par rapport au repère R_g

Écrivons les moments en G :

$$\frac{1}{2}\left\{\cancel{\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}};\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}\right\}_G \otimes \left\{m.\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}};\overrightarrow{\sigma_G(S/R_g)}\right\}_G$$

$$\boxed{\vec{0}}$$

$$\boxed{\tilde{I}(G,S)\times\cancel{\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}}} \quad \boxed{\vec{0}}$$

$$\boxed{T(S/R_g) = \frac{1}{2}\,m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}^{2}}$$

Ou de tout autre point

e) Ensemble de solides :

Comme pour les torseurs cinétiques et dynamiques, l’énergie cinétique d’un ensemble de solides est tout simplement la somme des énergies cinétiques de chacun des solides.

FIN DE LA PREMIERE PARTIE

2) PUISSANCE DES ACTIONS MECANIQUES EXTERIEURES A UN SYSTEME

PUISSANCES EXTERIEURES

a) Cas du solide : au mouvement du solide S par rapport à un repère R_g correspond le torseur cinématique suivant :

$$\left\{\mathcal{V}_{S/R_g}\right\}_A = \left\{\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}\ ;\ \overrightarrow{V_{A\in S/R_g}}\right\}_A$$

La puissance développée par un torseur d'action mécanique extérieure appliqué à ce solide, dans son mouvement galiléen par rapport à R_g, vaut alors :

☺ $$\mathcal{P}(ext \rightarrow S/R_g) = \left\{\mathcal{F}_{ext\rightarrow S}\right\}_A \otimes \left\{\mathcal{V}_{S/R_g}\right\}_A$$ ☺

$$\mathcal{P}(ext \to S/R_g) = \left\{\mathcal{F}_{ext \to S}\right\}_A \otimes \left\{\mathcal{V}_{S/R_g}\right\}_A$$

Nota :

☞ ***Ce résultat ne peut être appliqué que dans le cas d'efforts agissant sur un solide indéformable ou un ensemble de solides liés rigidement entre eux.***
(si ce n'est pas le cas, il faut calculer la puissance à partir d'un calcul intégral de la définition).

☞ ***Le comoment de deux torseurs ne dépend pas du point choisi (prendre celui amenant le minimum de calculs !).***

☞ ***La valeur de la puissance calculée dépend du repère par rapport auquel le solide se déplace et non pas du repère d'écriture des vecteurs…***

c) Cas des liaisons parfaites avec des solides extérieurs à E

Dans ce cas-là la puissance développée par ces liaisons parfaites n'est pas forcément nulle :

$$\mathcal{P}(\text{solide ext} \rightarrow S_i \in E\ /R_g) = \underbrace{\left\{\mathcal{F}_{\text{solide ext} \rightarrow S_i \in E}\right\}_A}_{\text{Torseur statique de la liaison}} \otimes \underbrace{\left\{\mathcal{V}_{S/R_g}\right\}_A}_{\text{Torseur cinématique du mouvement étudié}}$$

Par contre :

Grâce au «lien» entre torseur statique et torseur cinématique ☺

Si la liaison extérieure est parfaite et avec le bâti alors la puissance extérieure développée par cette liaison est nulle.

3) PUISSANCE DES ACTIONS MECANIQUES INTERIEURES A UN SYSTEME

PUISSANCES INTERIEURES

(appelée aussi puissance des inter-efforts)

Il s'agit de la puissance développée par les actions mutuelles (liaisons) entre les solides constituant E :

$$P(S_i \in E, S_j \in E) = \left\{\mathcal{F}_{S_i \to S_j}\right\}_A \otimes \left\{\mathcal{V}_{S_j / S_i}\right\}_A$$

$$= \left\{\mathcal{F}_{S_j \to S_i}\right\}_A \otimes \left\{\mathcal{V}_{S_i / S_j}\right\}_A$$

Croisement des indices

Torseur statique de la liaison

Torseur cinématique de la liaison

Nota

☞ ***Si ces liaisons sont parfaites (notamment sans frottement)***

$\Rightarrow$ $P_{int} = 0$

☞ ***Si frottement mais sans glissement relatif (roulement sans glissement)***

$\Rightarrow$ $P_{int} = 0$

4) THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

a) Cas du solide unique :

Soit un solide S en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g, le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\frac{d\,T(E/R_g)}{dt} = \mathcal{P}(ext \to S/R_g)$$

Autrement dit : *pour tout mouvement d'un solide S, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique galiléenne de ce solide, dans son mouvement par rapport à R_g, est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur ce solide.*

Appliquons le PFD à un solide S en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g :

$$\left\{\mathcal{F}_{ext\rightarrow S}\right\}_A = \left\{\mathcal{D}_{S/R_g}\right\}_A$$

Faisons le comoment (des deux cotés) par le torseur cinématique :

$$\left\{\mathcal{F}_{ext\rightarrow S}\right\}_A \otimes \left\{\mathcal{V}_{S/R_g}\right\}_A = \left\{\mathcal{D}_{S/R_g}\right\}_A \otimes \left\{\mathcal{V}_{S/R_g}\right\}_A$$

$$P(ext \rightarrow S/R_g)$$

$$\left\{\begin{matrix} \int_S \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}\, dm \\ \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}\, dm \end{matrix}\right\}_A \otimes \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R_g}} \end{matrix}\right\}_A$$

Calculons :

$$\begin{Bmatrix} \int_s \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}\, dm \\ \int_s \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}\, dm \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R_g}} \end{Bmatrix}_A$$

$$\Rightarrow \int_s \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}\, dm \,.\, \boxed{\overrightarrow{V_{A\in S/R_g}}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \,.\, \int_s \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}\, dm$$

$$\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}} + \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}$$

$$\Rightarrow \left[\int_s \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}\, dm \,.\, \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}} + \boxed{\int_s \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} \,.\, \left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}\right) dm}\right]$$

$$+ \boxed{\int_s \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \,.\, \left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}\right) dm}$$

= 0
par propriété du produit mixte

On obtient donc finalement :

$$\boxed{\boldsymbol{P}(ext \rightarrow S/R_g) = \int_s \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}\, dm \,.\, \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}}$$

$$= \int_s \frac{d\left(\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\right)}{dt} \,.\, \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\, dm$$

$$= \frac{1}{2} \times \int_s \frac{d\left(\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\right)^2}{dt}\, dm$$

$$= \frac{d\, T_{S/R_g}}{dt}$$

c q f d…

b) Ensemble de solides :

$$\frac{d\,T(E/R_g)}{dt} = P(ext \rightarrow E/R_g) + P_{int}(E)$$

Puissance extérieure

Puissance intérieure

Nota

☞ *si les liaisons entre les solides du système et ceux extérieurs sont parfaites (notamment sans frottement).*

$$P_{ext} \text{ pas forcément} = 0$$

☞ *si les liaisons entre les solides du système sont parfaites (notamment sans frottement).*

$$P_{int} = 0$$

☞ *toute équation (du second ordre) obtenue par le théorème de l'énergie cinétique est en fait liée directement à celles obtenues par les théorèmes généraux (en éliminant les inconnues de liaison).*

☞ *le théorème de l'énergie cinétique est généralement utilisé pour déterminer la loi entrée/sortie d'un mécanisme à une mobilité.*

FIN