ENERGETIQUE

1) *Energie cinétique*

2) *Puissance extérieure*

3) *Puissance intérieure*

4) *Théorème de l'énergie cinétique (TEC)*

Sera vu dans le prochain cours.

1) ENERGIE CINETIQUE

a) Définition :

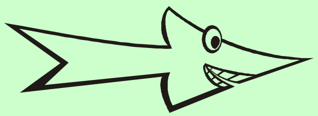
On appelle énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport au repère R_g, la quantité scalaire :

$$T(S/R_g) = \frac{1}{2}\int_S (\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}})^2 \times dm$$

C'est un scalaire !

De la forme $"\frac{1}{2} m V^2"$

L'unité est le Joule : « J »



$kg\ .\ m^2\ .\ s^{-2}$

b) Autre expression :

$$T_{S/R_g} = \frac{1}{2}\int_S \left(\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\right)^2 \times dm$$

$$T_{S/R_g} = \frac{1}{2}\int_S \left(\boxed{\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}}\,.\,\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\right)\times dm$$

Formule de changement de point

$$= \frac{1}{2}\int_S \left(\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}} + \overrightarrow{MG}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}\right).\,\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\times dm$$

$$= \frac{1}{2}\int_S \overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}\,.\,\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\times dm$$

En développant

$$+\ \frac{1}{2}\int_S \boxed{\left(\overrightarrow{MG}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}\right).\,\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}}\times dm$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}\,.\boxed{\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\times dm}$$

Propriété du produit mixte

Résultante cinétique

$$+\ \frac{1}{2}\int_S \left(\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\wedge\overrightarrow{MG}\right).\,\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}\times dm$$

$$\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right).\vec{C} = \left(\vec{C}\wedge\vec{A}\right).\vec{B} = \left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right).\vec{A}$$ (par permutation circulaire)

$$T_{S/R_g} = \frac{1}{2}\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}} \cdot \boxed{\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}} \times dm} + \frac{1}{2}\int_S \left(\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}} \wedge \overrightarrow{MG}\right) . \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \times dm$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}} \cdot m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \cdot \int_S \boxed{\left(\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}} \wedge \overrightarrow{MG}\right)} \times dm$$

Résultante cinétique

Moment cinétique $\int_S \left(\overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\right) \times dm$

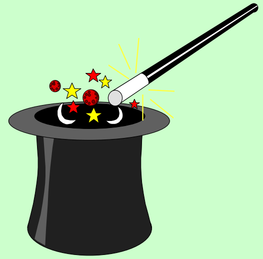
d'où

$$\boldsymbol{T(S/R_g) = \frac{1}{2}\, m\, \overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}^{2} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \cdot \overrightarrow{\sigma_G(S/R_g)}}$$

Formule qui n'est pas à apprendre par cœur (voir la suite…)

c) Utilisation de l'outil torseur :

En fait on a le résultat (plus simple à mémoriser) suivant :



$$\mathcal{T}(S/R_g) = \quad ☺☺☺$$

$$\frac{1}{2}\underbrace{\left\{\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}\,;\,\overrightarrow{V_{A\in S/R_g}}\right\}_A}_{\text{Torseur cinématique}} \underset{\text{Comoment}}{\otimes} \underbrace{\left\{m.\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}\,;\,\overrightarrow{\sigma_A(S/R_g)}\right\}_A}_{\text{Torseur cinétique}}$$

Torseur cinématique

Torseur cinétique

Comoment

$\frac{1}{2}\times$ comoment torseur ciné<u>ma</u>tique avec torseur cinétique.

☠ { ***- même point, même base.***
- <u>peu importe</u> le point d'écriture.

Voir explications sur le comoment diapo suivante.

Comoment de deux torseurs

$$\left\{ \overrightarrow{R_1} \; ; \; \overrightarrow{M_1(A)} \right\}_A \otimes \left\{ \overrightarrow{R_2} \; ; \; \overrightarrow{M_2(A)} \right\}_A$$

$$\boxed{\overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{M_2(A)} + \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{M_1(A)}}$$

Le résultat du comoment de deux torseurs est un **scalaire**…

qui ne dépend pas du point d'écriture !

Si calcul en B

$$\left\{ \overrightarrow{R_1} \; ; \; \overrightarrow{M_1(B)} \right\}_B \otimes \left\{ \overrightarrow{R_2} \; ; \; \overrightarrow{M_2(B)} \right\}_B = \overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{M_2(B)} + \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{M_1(B)}$$

$$= \overrightarrow{R_1} \cdot \left(\overrightarrow{M_2(A)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_2} \right) + \overrightarrow{R_2} \cdot \left(\overrightarrow{M_1(A)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_1} \right)$$

Produit mixte.

$$= \overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{M_2(A)} + \cancel{\overrightarrow{R_1} \cdot \left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_2} \right)} + \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{M_1(A)} + \boxed{\overrightarrow{R_2} \cdot \left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_1} \right)}$$

$$\cancel{\overrightarrow{R_1} \cdot \left(\overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{BA} \right)}$$

Même résultat quelque soit le point d'écriture des torseurs.

$$= \boxed{\overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{M_2(A)} + \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{M_1(A)}}$$

Vérification de l 'expression générale à partir du comoment des deux torseurs (cinématique et cinétique)

Écrivons les moments en G :

$$\frac{1}{2}\left\{\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}\,;\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}\right\}_G \otimes \left\{m.\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}\,;\overrightarrow{\sigma_G(S/R_g)}\right\}_G$$

$$\frac{1}{2}\,m\,\underbrace{\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}\cdot\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}}_{\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}^{\,2}} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}\,.\,\overrightarrow{\sigma_G(S/R_g)}$$

On retrouve bien l'expression de la diapo 4.

d) Cas particuliers :

Cas pas très courant.

1^er cas : mouvement d'un solide autour d'un point fixe A.

Écrivons les moments en ce point fixe A :

$$\frac{1}{2}\left\{\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \, ; \, \cancel{\overrightarrow{V_{A\in S/R_g}}}\right\}_A \otimes \left\{m.\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}} \, ; \, \overrightarrow{\sigma_A(S/R_g)}\right\}_A$$

Car point fixe de ce mouvement. $\vec{0}$

Résultat à ne pas connaître par cœur (il suffit d'écrire le comoment pour y arriver).

finalement :

$$T(S/R_g) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \cdot \underbrace{\overrightarrow{\sigma_A(S/R_g)}}_{\tilde{I}(A,S)\times\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}}$$

Car A est point fixe du mouvement S/R_g

2ème cas : rotation d'un solide autour d'un axe fixe $A\vec{x}$.

Cas nettement plus classique (quasi systématique !).

Le vecteur rotation est supposé être le suivant :

Simple rotation autour d'un seul axe (fixe), par exemple $\vec{x}$.

$$\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} = \omega\,\vec{x} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(S/R_g) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \cdot \underbrace{\overrightarrow{\sigma_A(S/R_g)}}$$

$$\tilde{I}(A,S) \times \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} = \begin{bmatrix} J_{A\vec{x}} & -F & -E \\ -F & J_{A\vec{y}} & -D \\ -E & -D & J_{A\vec{z}} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{A\vec{x}} \times \omega \\ -F \times \omega \\ -E \times \omega \end{pmatrix}$$

Car A est point fixe du mouvement S/R_g

Même base d'écriture !!!

$$T(S/R_g) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \cdot \underbrace{\overrightarrow{\sigma_A(S/R_g)}}_{\begin{pmatrix} J_{A\vec{x}} \times \omega \\ -F \times \omega \\ -E \times \omega \end{pmatrix}}$$

soit :

$$T(S/R_g) = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_{A\vec{x}} \times \omega \\ -F \times \omega \\ -E \times \omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times J_{A\vec{x}} \times \omega^2$$

$$\boxed{T(S/R_g) = \frac{1}{2}\,J_{A\vec{x}} \times \omega^2}$$

Résultat à connaître par cœur car trop fréquent.

De la forme $"\frac{1}{2} m V^2"$

Moment d'inertie de S autour de $A\vec{x}$

$\underline{3^{ème}\ cas :}$ translation d'un solide par rapport au repère R_g

Écrivons les moments en G :

$$\frac{1}{2}\left\{\cancel{\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}} ; \overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}\right\}_G \otimes \left\{m.\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}} ; \underbrace{\overrightarrow{\sigma_G(S/R_g)}}\right\}_G$$

$\vec{0}$ Car translation.

Ne pas oublier le cas de la translation circulaire...

Car G est CdG.

$$\tilde{I}(G,S) \times \cancel{\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}}$$

$\vec{0}$ Car translation (déjà dit...).

$$\Rightarrow \boxed{T(S/R_g) = \frac{1}{2}\, m\, \overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}^{\,2}}$$

ou de tout autre point

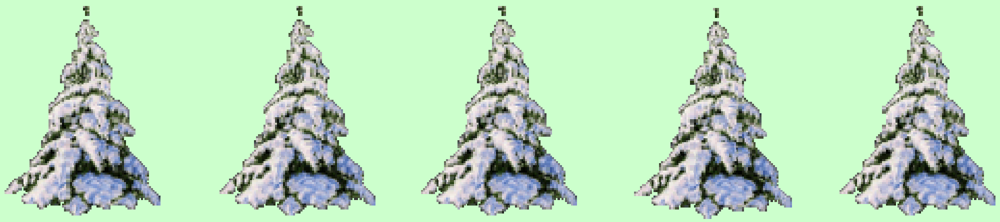
Puisque pour une translation tous les points ont la même vitesse (à un instant donné).

e) Ensemble de solides :

Comme pour les torseurs cinétiques et dynamiques, l'énergie cinétique d'un ensemble de solides est tout simplement la somme des énergies cinétiques de chacun des solides.

Donc si douze pièces (hormis le bâti)

→ douze calculs…



<u>Ce qu'il faut avoir retenu</u>

(minimum « vital »…)

- Savoir que l'énergie cinétique est un <u>scalaire</u> dont l'unité est le Joule (kg.m^2.s^{-2}).

- Pour une translation (ne pas oublier la translation circulaire) on a : $\frac{1}{2} m V^2$ en prenant n'importe quel point pour le calcul de la vitesse.

- Pour une rotation autour d'un axe fixe on a : $\frac{1}{2} J \omega^2$

  avec ***J*** l'inertie du solide autour de cet axe et ω sa vitesse angulaire.

- Pour <u>tout autre mouvement</u> faire le comoment du torseur ciné<u>m</u>atique avec le le torseur cinétique, en se plaçant plutôt en ***G*** (le moment cinétique est plus facile à calculer : matrice d'inertie en ***G*** x vecteur rotation).

- L'énergie cinétique d'un ensemble de solides est la somme des énergies cinétiques de chaque solide.