CINETIQUE

1) Conservation de la masse

2) Le torseur cinétique

3) Le torseur dynamique

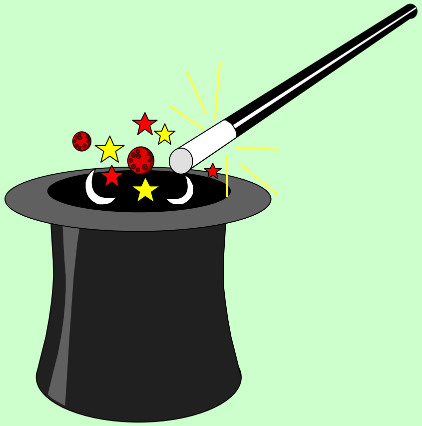
4) Relation entre les deux torseurs

Sera vu dans le prochain cours.

1) Principe de conservation de la masse

*Un système matériel **E** est à masse conservatrice si sa masse est indépendante :*

- *du repère depuis lequel on observe le mouvement de **E**.*
- *du temps auquel on observe le mouvement de **E**.*



$$\frac{dm}{dt} = 0$$

La masse reste constante au cours du temps.

On démontre alors en mathématiques que si f est une fonction vectorielle qui associe le vecteur $\overrightarrow{f(M,t)}$ à tout point M de E (et ceci à tout instant), on a :

$$\frac{d}{dt}\left(\int_E \overrightarrow{f(M,t)} \times dm\right)_{/R} = \int_E \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{f(M,t)}\right)_{/R} \times dm$$

On a en fait une inversion possible de ces deux opérations mathématiques.

On admettra que cette relation s'applique pour tous les systèmes matériels étudiés en mécanique (solide, ensemble de solides, quantité de liquide ou de gaz).

2) Le torseur cinétique

a) Définition : *le torseur cinétique, ou torseur des quantités de mouvement, du solide S dans son mouvement par rapport à un repère R est défini par :*

- *une résultante cinétique (quantité de mouvement) de S/R*
- *un moment cinétique en un point (A par exemple) de S/R*

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}$

Retenir la notation mais pas l'écriture sous forme d'intégrales triples.

$$\left\{\mathscr{C}(S/R)\right\}_A = \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}}.dm \\ \displaystyle\int_S \overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{V_{M\in S/R}}.dm \end{array}\right\}_A$$

b) Autre expression de la résultante cinétique :

But cherché : trouver un calcul simple de la résultante.

Ce qu'il faudra retenir...

Soit G le centre de gravité du solide S, on a :

$$m \times \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OM} \times dm$$

(définition du CdG)

d'où en dérivant :

$$\frac{d}{dt}\left(m \times \overrightarrow{OG}\right)_{/R} = \frac{d}{dt}\left(\int_S \overrightarrow{OM} \times dm\right)_{/R}$$

constante

utilisation du principe de conservation de la masse

$$m \times \left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right|_{/R} = \int_S \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/R} \times dm$$

$$m \times \overrightarrow{V_{G\in S/R}} = \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \times dm$$

Résultante cinétique

d'où au final :

$$\left\{ m\ \overrightarrow{V_{G\in S/R}}\ ;\ \overrightarrow{\sigma_A(S/R)} \right\}_A$$

Vitesse galiléenne

La résultante cinétique est juste le produit de la masse du système isolé par la vitesse de son CdG.

Vitesse du Cdg et non de A !!!

… et quelque soit le point d'écriture du torseur cinétique !

c) Changement de point :

Supposons le torseur cinétique précédent défini au point A et cherchons à l'écrire en B.

$$\overrightarrow{\sigma_B(S/R)} = \int_S \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \times dm$$

$$= \int_S \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right) \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \times dm$$

$$= \overrightarrow{BA} \wedge \underbrace{\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \times dm}_{m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}} + \underbrace{\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \times dm}_{\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R}}}$$

d'où finalement :

Résultante cinétique

$$\overrightarrow{\sigma_B(S/R)} = \overrightarrow{\sigma_A(S/R)} + \overrightarrow{BA} \wedge m.\overrightarrow{V_G(S/R)}$$

Formule de changement de point classique donc on peut effectivement parler de torseur cinétique

Rien de nouveau…

d) Cas du solide :

But cherché: ***trouver un calcul simple du moment cinétique.***

Repartons de la définition du moment cinétique :

$$\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \boxed{\overrightarrow{V_{M\in S/R}}} \times dm$$

$$= \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right).\, dm$$

soit en développant : $\boxed{m\,\overrightarrow{AG}}$

$$= \underbrace{\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}.\, dm}_{\boxed{\int_S \overrightarrow{AM}\, dm} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}} + \underbrace{\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right).dm}_{I(A,S)\,\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$$

Résultat issu du cours précédent.

d'où finalement :

$$\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = I(A,S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}$$

A ne pas retenir « obligatoirement »

$$\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = I(A,S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}$$

Premier cas particulier :

Le point A est confondu avec le centre de gravité G.

$$\boxed{\vec{0}}$$

$$\overrightarrow{\sigma_G(S/R)} = I(G,S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}}) + m.\cancel{\overrightarrow{GG}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R}}$$

Faire les calculs ***dans la base de la matrice d'inertie***.
(ne pas faire de changement de base de cette matrice!)

$$\overrightarrow{\sigma_G(S/R)} = I(G,S)\ \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

Le moment cinétique est ici le simple produit de la matrice d'inertie (en G) par le vecteur rotation du mouvement galiléen concerné.

$$\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = I(A,S).\,\overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}$$

Deuxième cas particulier :

Le point A est fixe dans R.

$$\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = I(A,S).\,\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\,) + m.\overrightarrow{AG} \wedge \cancel{\overrightarrow{V_{A\in S/R}}}$$

$$\vec{0}$$

Faire les calculs ***dans la base de la matrice d’inertie***.
(ne pas faire de changement de base de cette matrice!)

$$\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = I(A,S)\ \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

Le moment cinétique est ici aussi le simple produit de la matrice d’inertie (ici en A) par le vecteur rotation du mouvement galiléen concerné.

$$\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = I(A,S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}$$

Troisième cas particulier :

☞ ***La masse du solide est concentrée en son centre de gravité G (point matériel).***

$$\overrightarrow{\sigma_G(S/R)} = I(G,S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}}) + m.\cancel{\overrightarrow{GG}}^{\,\boxed{\vec{0}}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_G$$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_G(S/R)} = \vec{0}}$$ ☺

La matrice d'inertie d'un solide assimilé à un point est nulle (car aucune distance).

Synthèse

Faire systématiquement les calculs en G
(ou en un point fixe A s'il existe
pour le mouvement étudié)

Assez simple à retenir.

$$\overrightarrow{\sigma_{G\,ou\,A}(S/R)} = I(G\,ou\,A, S)\,\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

Même mouvement.

Faire les calculs ***dans la base de la matrice d'inertie***.
(ne pas faire de changement de base de cette matrice!)

Ce qu'il faut avoir retenu

(minimum « vital »…)

- Savoir que le torseur cinétique (à ne pas confondre avec cinématique…) correspond à la quantité de mouvement : « masse x vitesse ».
- La résultante cinétique vaut : $m_S \times \overrightarrow{V_{G\in S/R}}$ (vitesse galiléenne du CdG du du solide étudié).
- Faire d'abord le calcul du moment cinétique en son CdG (ou en un point fixe du mouvement s'il en existe un), puis changer de point pour aller au point demandé.
- Faire les calculs dans la base de la matrice d'inertie, quitte à changer ensuite de base le vecteur résultat.