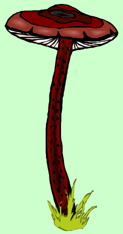
CARACTERISTIQUES D'INERTIE DES SOLIDES

1) CENTRE D'INERTIE
2) MOMENT D'INERTIE
3) MATRICE D'INERTIE
4) SOLIDES ELEMENTAIRES



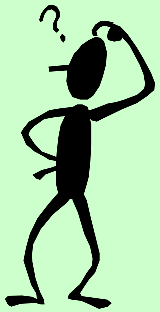
1) CENTRE D'INERTIE

a) Définition :

On appelle centre d'inertie (ou centre de gravité) d'un solide S le point G, unique et fixe dans S, défini par :

intégrale triple

$$\iiint_S \overrightarrow{GM} \times dm = \vec{0}$$



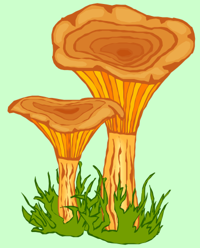
Sur l'ensemble du solide **S**.

☞ ***M est un point « courant » qui décrit totalement le solide S.***

si solide homogène : *centre de masse = centre de volume*

si g est constant : *centre de masse = centre de gravité*

Habituellement nous « mélangerons » tous ces points…

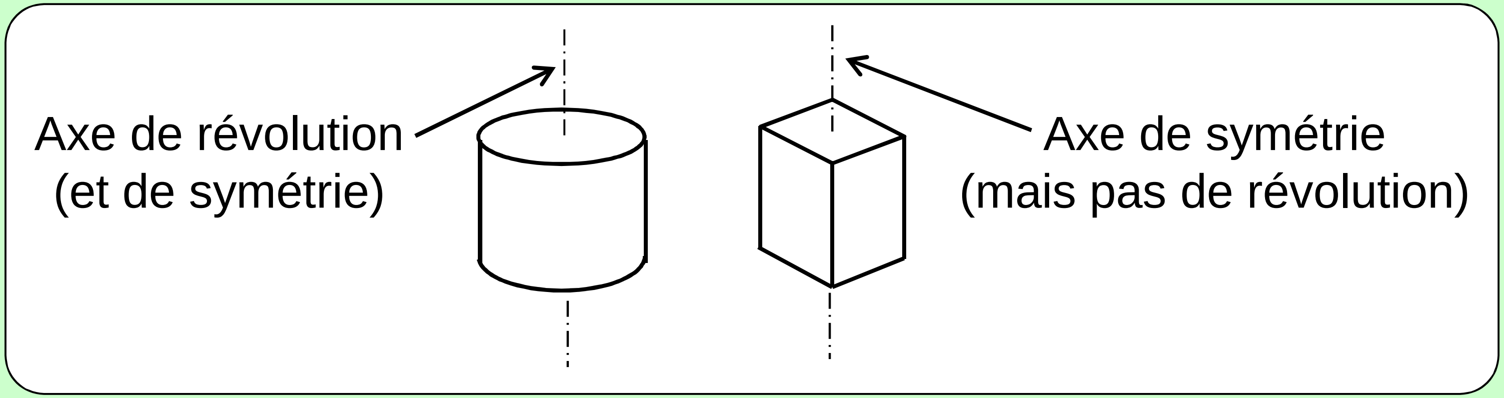


b) Propriétés :

► Symétrie matérielle : ***s'il existe, pour un solide S, un élément de symétrie (plan, axe), d'un point de vue répartition des masses, le centre d'inertie G appartient alors à cet élément de symétrie.***

Nous sommes très souvent dans cette situation avec un plan de symétrie ou un axe de révolution.

Différent d'un axe de symétrie !



▶ **Position :** ***soit A un point quelconque, on a :***

$$\int_S \overrightarrow{GM} \times dm = \int_S \big(\underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM}}_{\overrightarrow{GM}}\big) \times dm$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{GA} \times \int_S dm + \int_S \overrightarrow{AM} \times dm$$

$$\boxed{m \times \overrightarrow{AG} = \int_S \overrightarrow{AM} \times dm}$$

Relation de barycentre.

$$m \times \overrightarrow{AG} = \int_S \overrightarrow{AM} \times dm$$

Nota : ***si on appelle (x_G y_G z_G) les composantes de $\overrightarrow{AG}$ on a en projection sur les axes du repère :***

$$m \times x_G = \iiint_S x \times dm$$

$$m \times y_G = \iiint_S y \times dm$$

$$m \times z_G = \iiint_S z \times dm$$

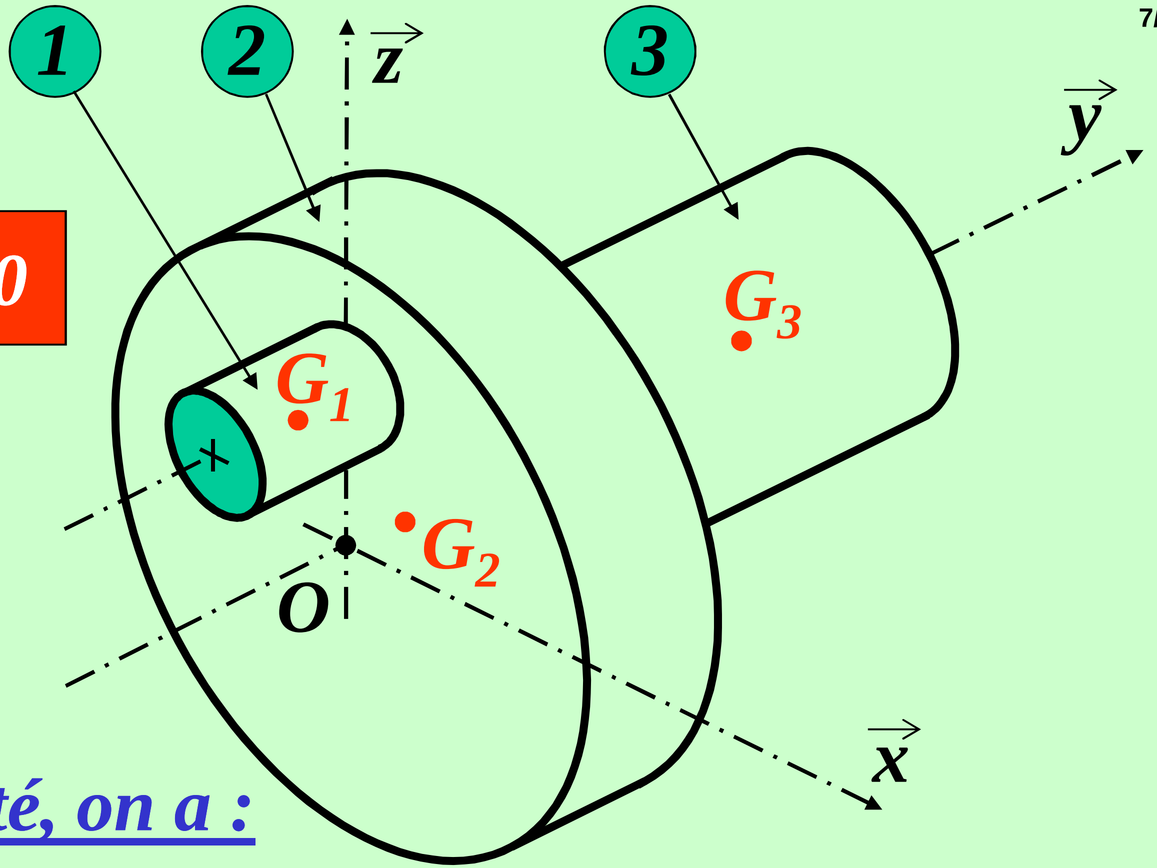
► **Associativité :** ***pour un ensemble de n solides S_i de masses respectives m_i et de centres d'inertie G_i, on a :***

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\sum_1^n \left(m_i . \overrightarrow{AG_i}\right)}{\sum_1^n m_i}$$

masse totale

c) Exemple :

Symétrie ⟶ $x_G = 0$



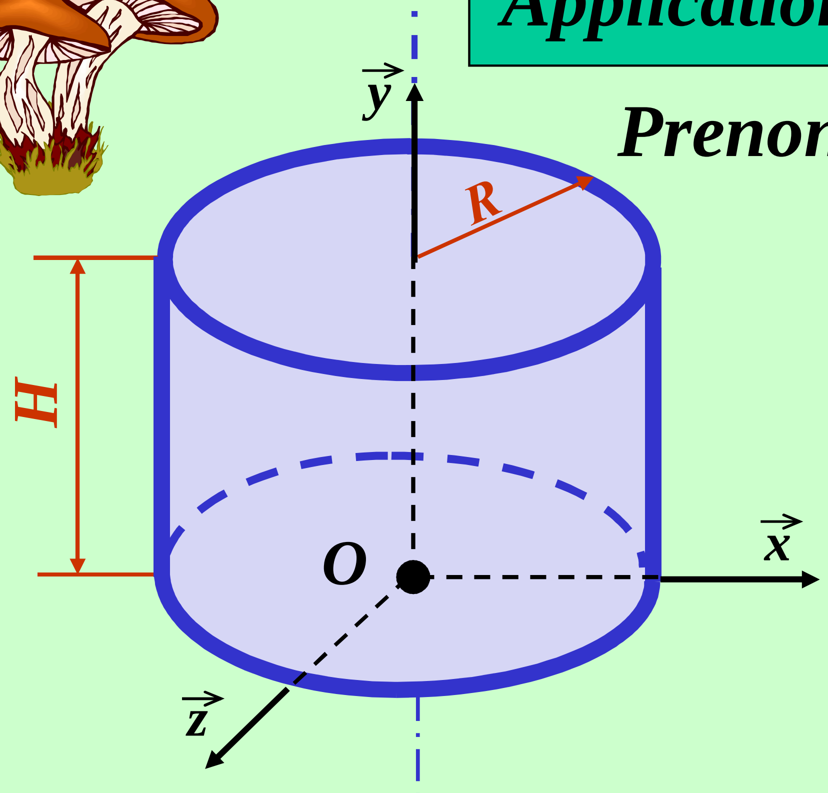
Par simple associativité, on a :

$$(m_1 + m_2 + m_3)\overrightarrow{OG} = m_1\,\overrightarrow{OG_1} + m_2\,\overrightarrow{OG_2} + m_3\,\overrightarrow{OG_3}$$

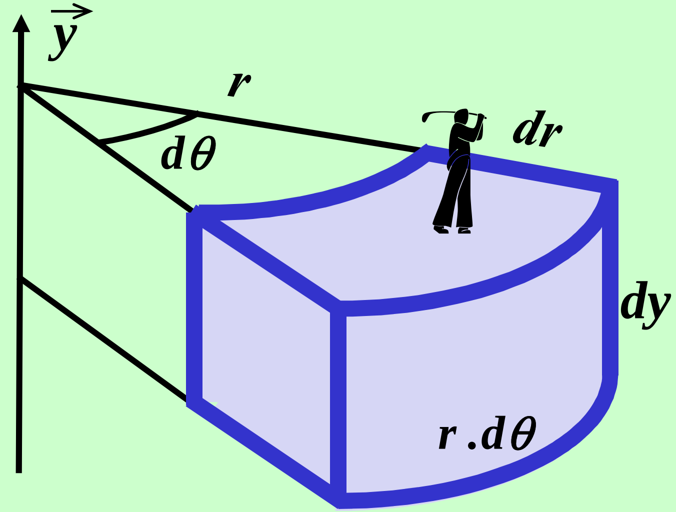
en projection sur $\vec{y}$ et $\vec{z}$

ou bien : $(m_1 + m_2 + m_3)\overrightarrow{G_1G} = m_2\,\overrightarrow{G_1G_2} + m_3\,\overrightarrow{G_1G_3}$

Application à un cylindre



Prenons l'élément de matière suivant :



Préliminaire → *calcul du volume :*

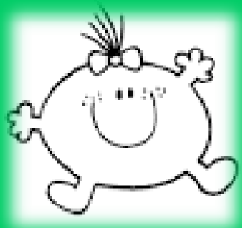
$$\mathbf{dv} = dr.dy.r\,d\theta$$

$$\mathbf{V} = \int_0^R r\,dr \,.\, \int_0^{2\pi} d\theta \,.\, \int_0^H dy$$

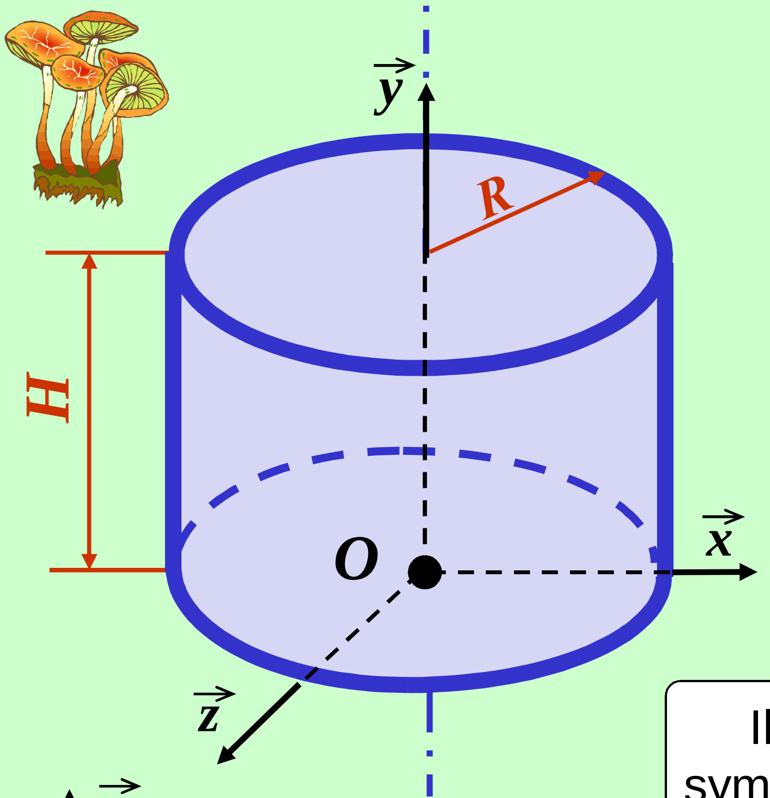
$$\frac{R^2}{2} \qquad 2\pi \qquad H$$

Finalement :

$$V = \pi R^2 H$$

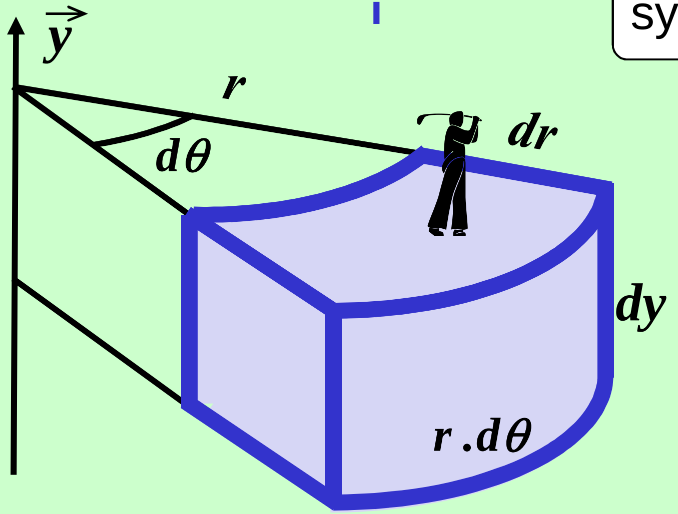


Calcul de la position du centre de gravité :



Par symétrie ***G*** *est sur l'axe* $O\vec{y}$

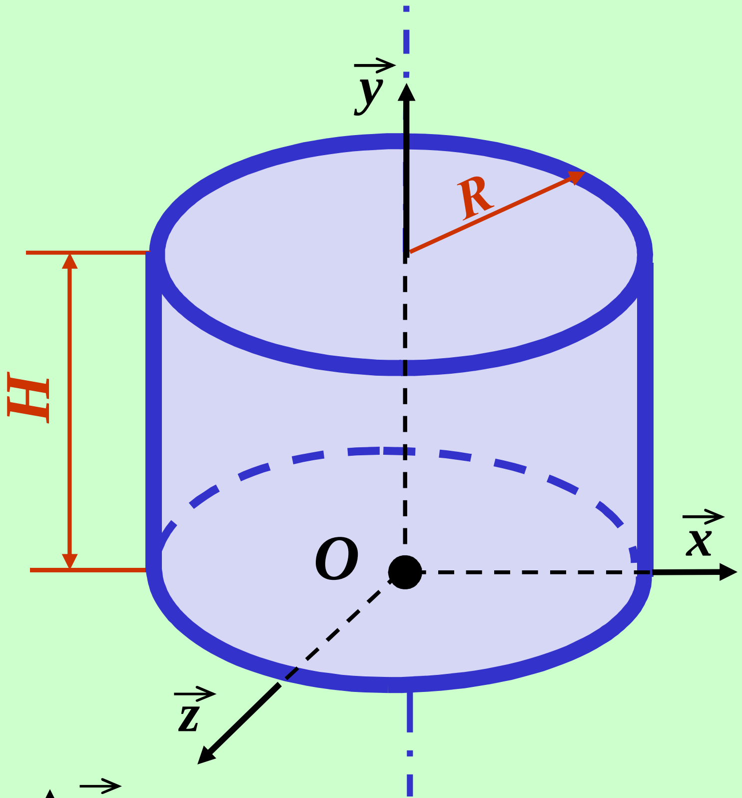
Il appartient aussi au plan médian horizontal (par symétrie) mais faisons comme si on ne l'avait pas vu…



Partons de la définition

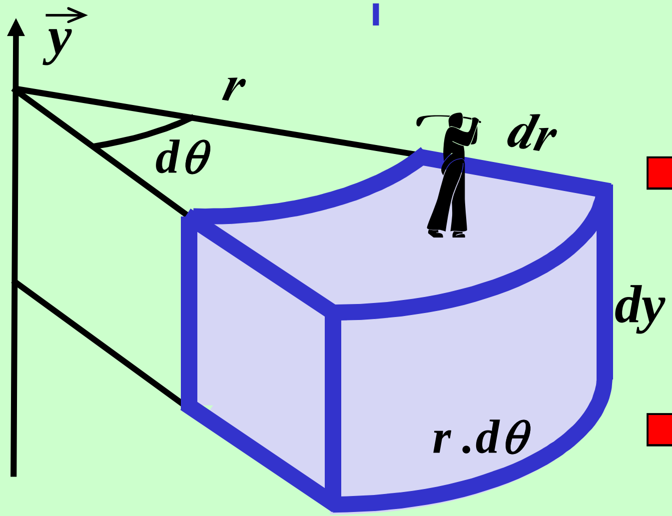
$$m \times \overrightarrow{OG} = \iiint_{solide} \overrightarrow{OM} \times dm$$

Calcul de y_G



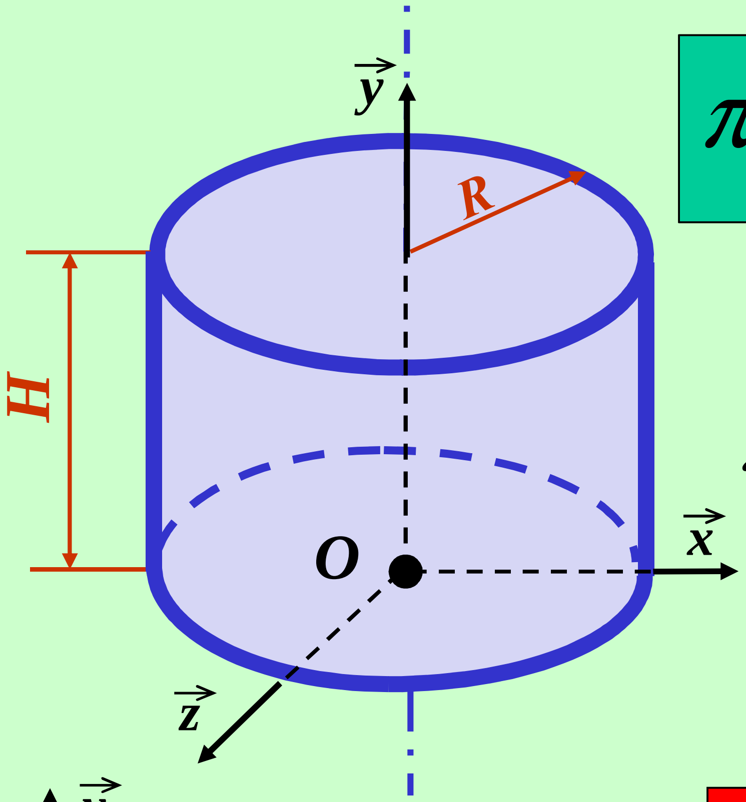
$$m\times\overrightarrow{OG}=\iiint_{solide}\overrightarrow{OM}\times dm$$

$$m\times y_G=\int_S y\times dm$$



$$\overbrace{\cancel{\rho}.V}.y_G=\int_S y.\overbrace{\cancel{\rho}.dv}$$

$$\pi R^2 H.y_G=\int_S y.r\,dr\,d\theta\,dy$$

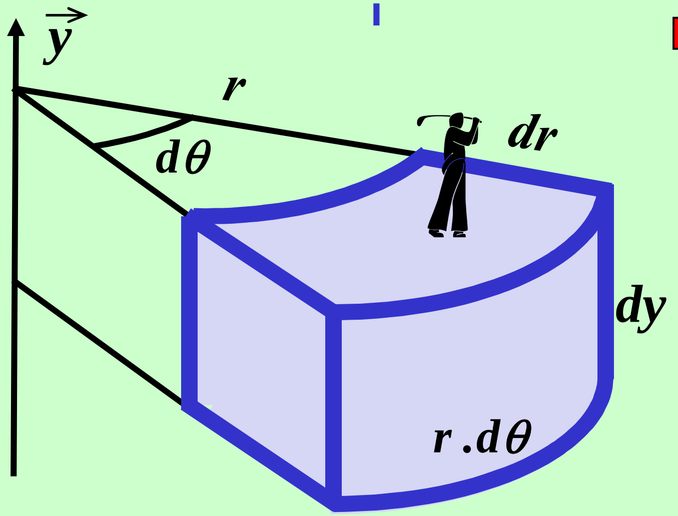


$$\pi R^2 H \times y_G = \int_S y \times r\,dr\,d\theta\,dy$$

d'où :

$$\pi R^2 H \times y_G = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \times \left[\theta\right]_0^{2\pi} \times \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^H$$

$$\Rightarrow \cancel{\pi}\,\cancel{R^2}\,\cancel{H}\,.\,y_G = \frac{\cancel{R^2}}{\cancel{2}}\,.\,\cancel{2}\,\cancel{\pi}\,.\,\frac{H^{\cancel{2}}}{2}$$



soit :

$$\boldsymbol{y_G = \frac{H}{2}}$$

Ce qu'il faut avoir retenu

(minimum « vital »…)

- Savoir utiliser les éléments de symétrie pour déterminer un centre de gravité.
- Connaître la différence entre un axe de symétrie et un axe de révolution.
- Savoir utiliser l'associativité et la relation de barycentre.
- Le calcul intégral pour déterminer un centre de gravité n'est pas au programme…