

REVISIONS
de
CINEMATIQUE



1) DERIVATION D'UN VECTEUR UNITAIRE

2) VECTEUR VITESSE

3) VECTEUR ACCELERATION

4) COMPOSITION DES VECTEURS ROTATION

5) COMPOSITION DES VECTEURS VITESSE

6) COMPOSITION DES VECTEURS ACCELERATION

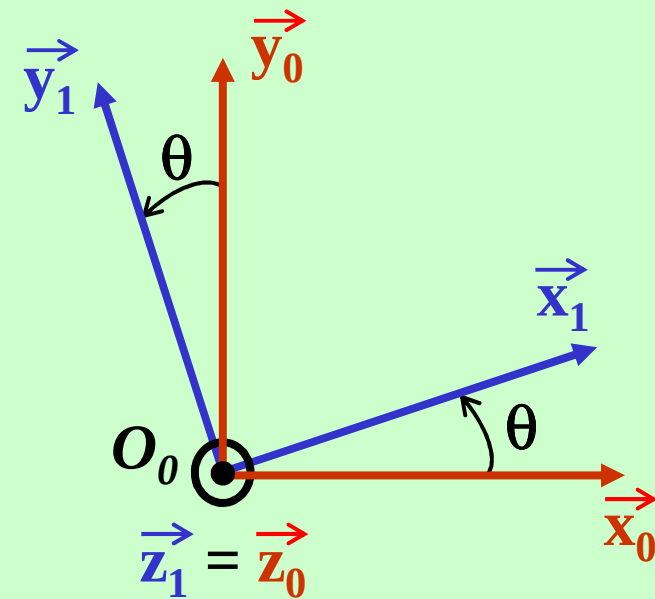
7) ROULEMENT SANS GLISSEMENT

8) TORSEUR CINEMATIQUE

1) DERIVATION D'UN VECTEUR UNITAIRE

*Le repère (base ou solide) R_1 tourne en O_0
par rapport à R_0*

$$\left(\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{/R_0} = \dot{\theta} \vec{y}_1$$



**Dérivation
vecteur
unitaire**

Vecteur
vitesse

Vecteur
accélération

Composition
vecteurs
rotation

Composition
vecteurs
vitesse

Composition
vecteurs
accélération

Roulement
sans
glissement

Torseur
cinématique



Par calcul : $\left(\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{/R_0} = \frac{d}{dt} \left(\cos \theta \vec{x}_0 + \sin \theta \vec{y}_0 \right)_{/R_0}$

$\vec{x}_1$

$$= -\dot{\theta} \sin \theta \vec{x}_0 + \cos \theta \left(\frac{d \vec{x}_0}{dt} \right)_{/R_0} + \dot{\theta} \cos \theta \vec{y}_0 + \sin \theta \left(\frac{d \vec{y}_0}{dt} \right)_{/R_0}$$

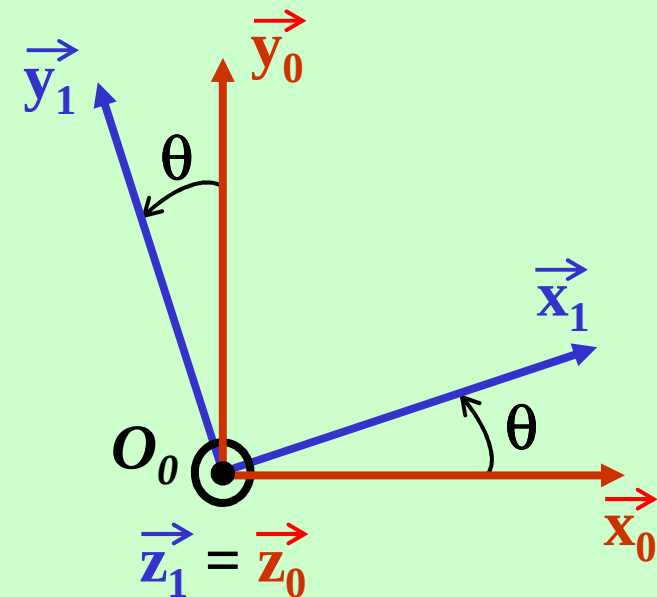
$\vec{0}$ car $\vec{x}_0$ est fixe dans R_0

$\vec{0}$ car $\vec{y}_0$ est fixe dans R_0

$$= \dot{\theta} \left(-\sin \theta \vec{x}_0 + \cos \theta \vec{y}_0 \right)$$

$\vec{y}_1$

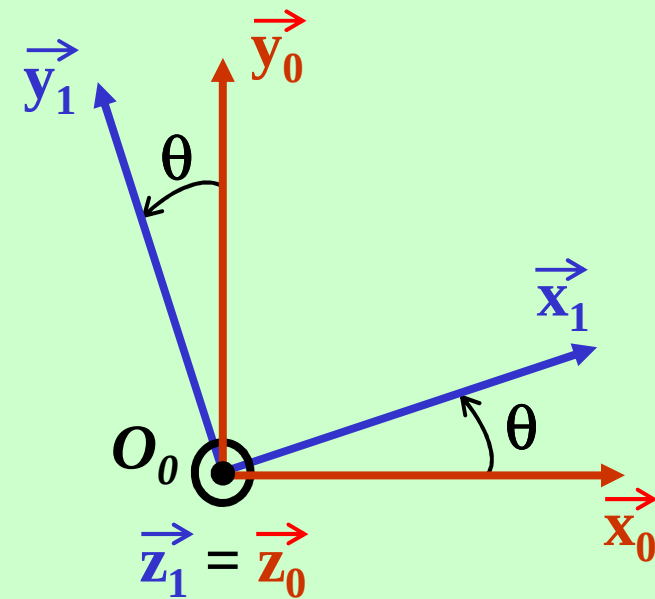
$$= \dot{\theta} \vec{y}_1$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{/R_0} = \dot{\theta} \vec{y}_1 \\ \left(\frac{d \vec{y}_1}{dt} \right)_{/R_0} = -\dot{\theta} \vec{x}_1 \\ \left(\frac{d \vec{z}_1}{dt} \right)_{/R_0} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Bien noter que :

$$\left(\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_{/R_1} = \left(\frac{d \vec{y}_1}{dt} \right)_{/R_1} = \vec{0}$$



Dérivation
vecteur
unitaire

Vecteur
vitesse

Vecteur
accélération

Composition
vecteurs
rotation

Composition
vecteurs
vitesse

Composition
vecteurs
accélération

Roulement
sans
glissement

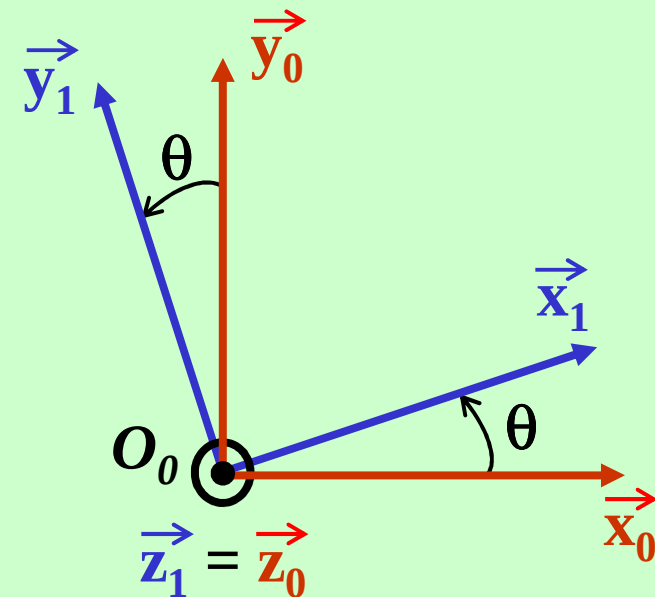
Torseur
cinématique



$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta} \overrightarrow{z_0} = \dot{\theta} \overrightarrow{z_1}$$

Bien noter que l'on a le même résultat si :

- ▶ $O_0 \neq O_1$
Les repères ne sont pas centrés au même point.
- ▶ R_0 n'est pas fixe.



Dérivation
vecteur
unitaire

Vecteur
vitesse

Vecteur
accélération

Composition
vecteurs
rotation

Composition
vecteurs
vitesse

Composition
vecteurs
accélération

Roulement
sans
glissement

Torseur
cinématique



Annexe : changement de repère de dérivation
 (« formule de Bour »)

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt} \right) / R_2 = \left(\frac{d\vec{U}}{dt} \right) / R_1 + \vec{U} \wedge \vec{\Omega}_{2/1}$$



Pas vraiment indispensable



Dérivation
vecteur
unitaire

Vecteur
vitesse

Vecteur
accélération

Composition
vecteurs
rotation

Composition
vecteurs
vitesse

Composition
vecteurs
accélération

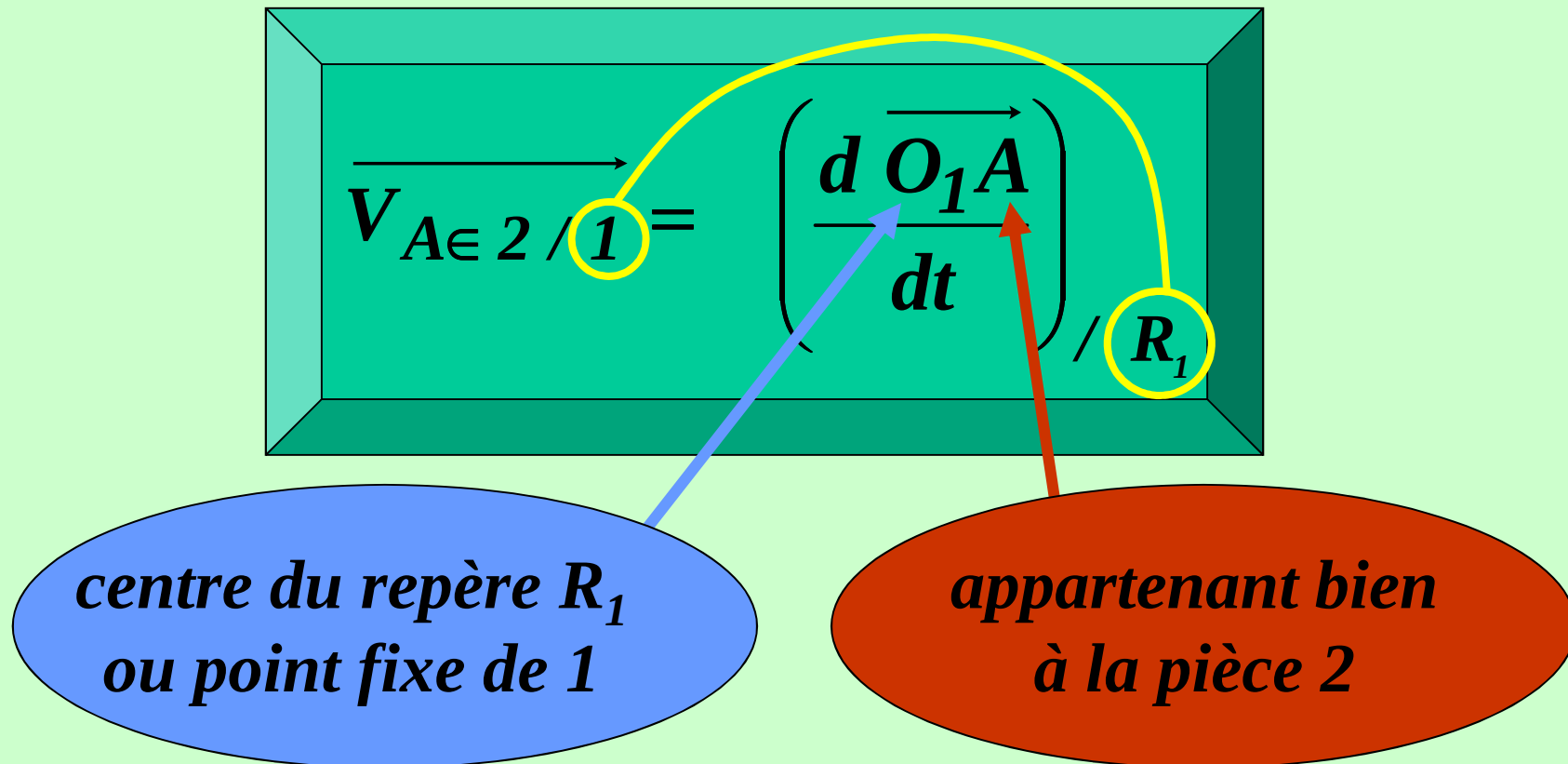
Roulement
sans
glissement

Torseur
cinématique



2) VECTEUR VITESSE

a) Par dérivation du vecteur position :



Dérivation
vecteur
unitaire

**Vecteur
vitesse**

Vecteur
accélération

Composition
vecteurs
rotation

Composition
vecteurs
vitesse

Composition
vecteurs
accélération

Roulement
sans
glissement

Torseur
cinématique



b) Par changement de point :

$$\vec{V}_{A \in 2/1} = \vec{V}_{B \in 2/1} + \vec{AB} \wedge \Omega_{2/1}$$



en utilisant un point de vitesse connue !!!

Dérivation
vecteur
unitaire

**Vecteur
vitesse**

Vecteur
accélération

Composition
vecteurs
rotation

Composition
vecteurs
vitesse

Composition
vecteurs
accélération

Roulement
sans
glissement

Torseur
cinématique



3) VECTEUR ACCELERATION

👉 uniquement par dérivation du vecteur vitesse !!!

The diagram shows a 3D rectangular box with a teal face. Inside the box, the following equation is written:

$$\Gamma_{A \in 2 / 1} = \frac{d}{dt} \left(V_{A \in 2 / 1} \right)$$

Annotations in the diagram:

- A horizontal arrow points from the left towards the first term of the equation.
- A blue circle highlights $\Gamma_{A \in 2 / 1}$.
- A yellow circle highlights $2 / 1$ in the denominator of the fraction.
- A blue circle highlights $V_{A \in 2 / 1}$.
- A yellow circle highlights $2 / 1$ in the denominator of the derivative.
- A yellow circle highlights 1 in the denominator of the derivative.
- A blue circle highlights 1 in the denominator of the derivative.
- A blue arc connects the first term to the derivative term.
- A yellow arc connects the derivative term to the first term.
- A brown arc connects the first term to the derivative term.

Dérivation
vecteur
unitaire

Vecteur
vitesse

Vecteur
accélération

Composition
vecteurs
rotation

Composition
vecteurs
vitesse

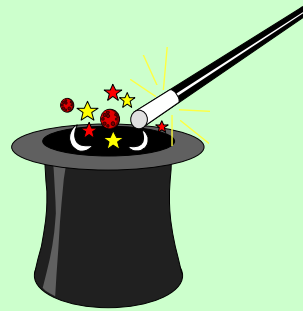
Composition
vecteurs
accélération

Roulement
sans
glissement

Torseur
cinématique



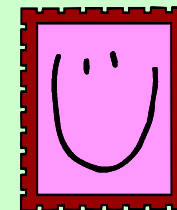
*En effet si on veut procéder par changement de point
il faudrait utiliser la formule suivante :*



$$\overrightarrow{\Gamma_{A \in 2/1}} = \overrightarrow{\Gamma_{B \in 2/1}} + \overrightarrow{AB} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{\Omega_{2/1}}}{dt} \right)_{/1} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \right)$$



aucun intérêt !!!



Dérivation
vecteur
unitaire

Vecteur
vitesse

**Vecteur
accélération**

Composition
vecteurs
rotation

Composition
vecteurs
vitesse

Composition
vecteurs
accélération

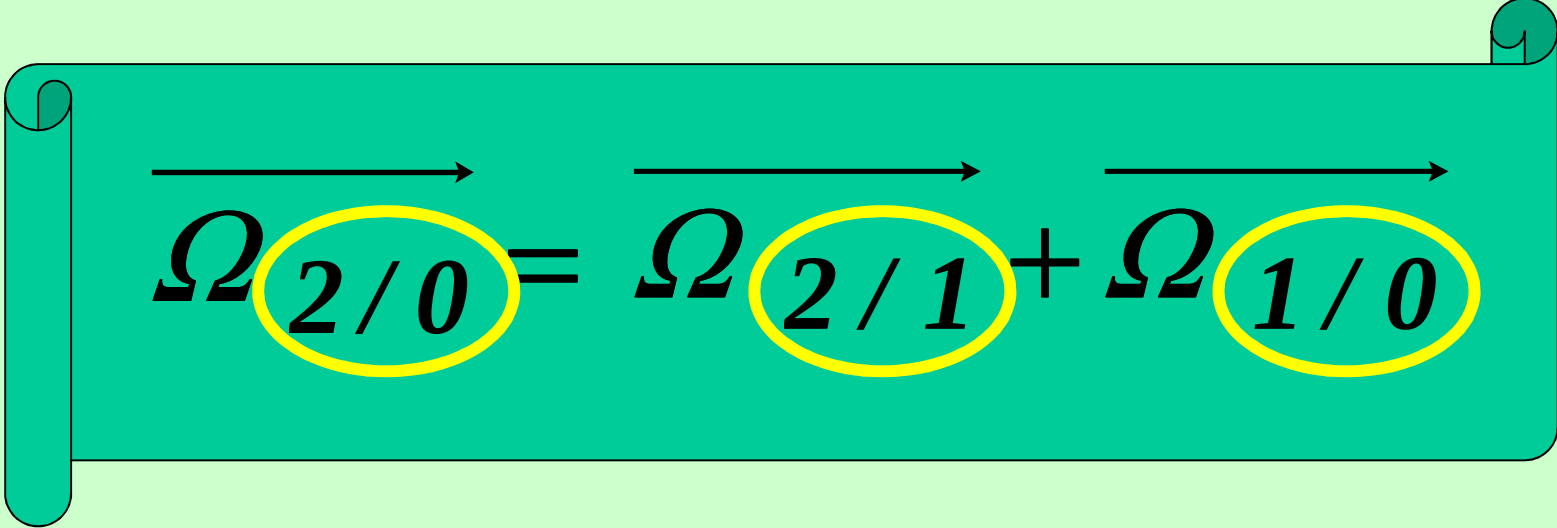
Roulement
sans
glissement

Torseur
cinématique



4) COMPOSITION DES VECTEURS ROTATION

**On a la relation très simple suivante :
(quels que soient les mouvements)**



$$\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

Dérivation
vecteur
unitaire

Vecteur
vitesse

Vecteur
accélération

Composition
vecteurs
rotation

Composition
vecteurs
vitesse

Composition
vecteurs
accélération

Roulement
sans
glissement

Torseur
cinématique



5) COMPOSITION DES VECTEURS VITESSE

*On a la relation très simple suivante :
(quels que soient les mouvements)*

$$\vec{V}_{A \in 2/0} = \vec{V}_{A \in 2/1} + \vec{V}_{A \in 1/0}$$

Dérivation
vecteur
unitaire

Vecteur
vitesse

Vecteur
accélération

Composition
vecteurs
rotation

Composition
vecteurs
vitesse

Composition
vecteurs
accélération

Roulement
sans
glissement

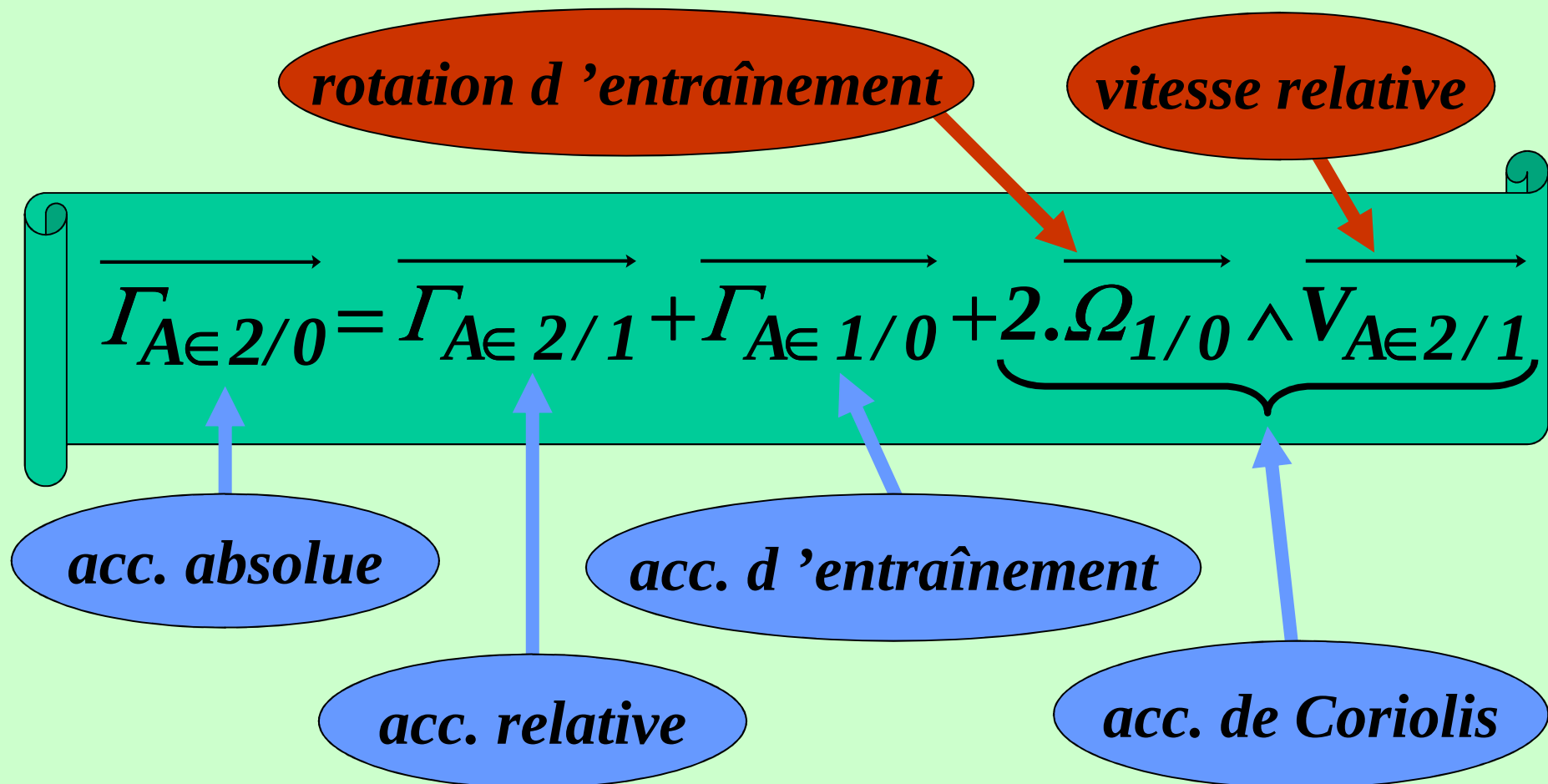
Torseur
cinématique



6) COMPOSITION DES VECTEURS ACCELERATION

14/19

On a la relation (« très simple ») suivante :



Dérivation
vecteur
unitaire

Vecteur
vitesse

Vecteur
accélération

Composition
vecteurs
rotation

Composition
vecteurs
vitesse

Composition
vecteurs
accélération

Roulement
sans
glissement

Torseur
cinématique





Hémisphère nord (Guadeloupe)



Hémisphère sud (Réunion)



*Dérivation
vecteur
unitaire*

*Vecteur
vitesse*

*Vecteur
accélération*

*Composition
vecteurs
rotation*

*Composition
vecteurs
vitesse*

*Composition
vecteurs
accélération*

*Roulement
sans
glissement*

*Torseur
cinématique*



7) ROULEMENT SANS GLISSEMENT

Contact de **1** sur **2** au point **A**

$$\overrightarrow{V_{A \in 2 / 1}} = \overrightarrow{V_{A \in 1 / 2}} = \mathbf{0}$$

Dérivation
vecteur
unitaire

Vecteur
vitesse

Vecteur
accélération

Composition
vecteurs
rotation

Composition
vecteurs
vitesse

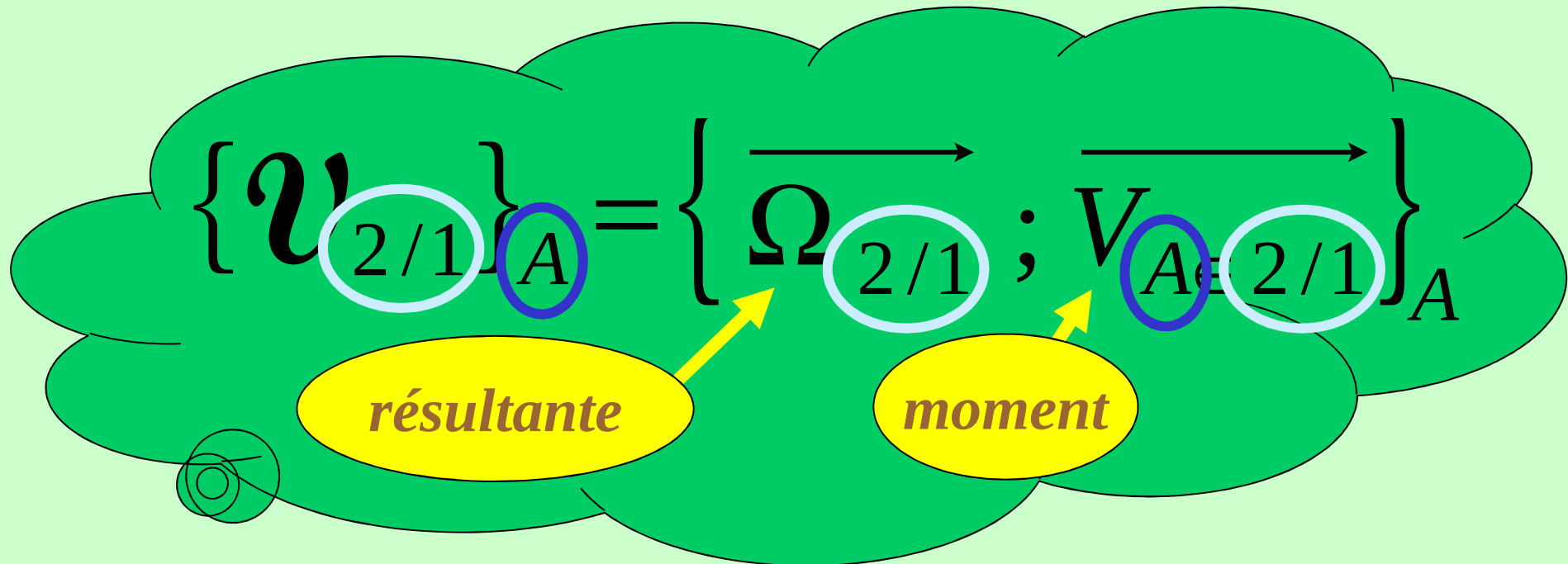
Composition
vecteurs
accélération

Roulement
sans
glissement

Torseur
cinématique



8) TORSEUR CINEMATIQUE



Bien préciser le point d'écriture
ainsi que la base d'écriture



Dérivation
vecteur
unitaire

Vecteur
vitesse

Vecteur
accélération

Composition
vecteurs
rotation

Composition
vecteurs
vitesse

Composition
vecteurs
accélération

Roulement
sans
glissement

**Torseur
cinématique**



Si mouvement de rotation pure :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\}_A = \left\{ \overrightarrow{\Omega}_{2/1} ; \vec{0} \right\}_A$$

👉 forme vraie en tout point de l'axe de rotation.

Si mouvement de translation pure :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\}_A = \left\{ \vec{0} ; \overrightarrow{V}_{A \in 2/1} \right\}_A$$

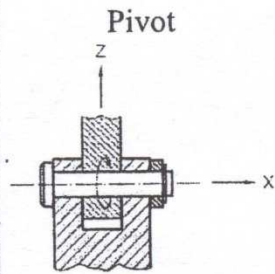
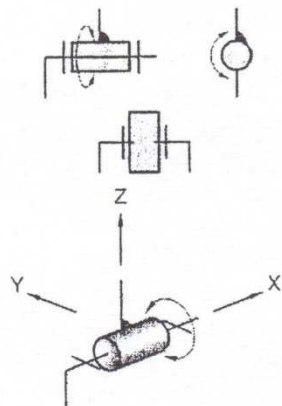
👉 forme vraie en tout point de l'espace.

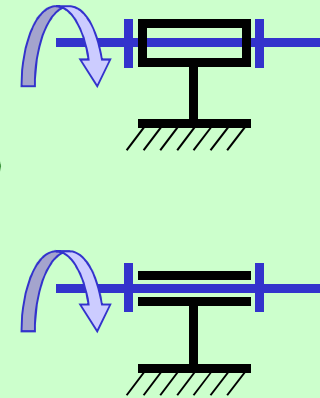
Tableau des liaisons



Liaison pivot

Forme valable

1			Axe $(O, \vec{x})$	$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_P$	$\forall P \in (O, \vec{x})$
---	---	---	--------------------	--	--	------------------------------

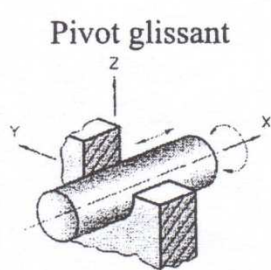
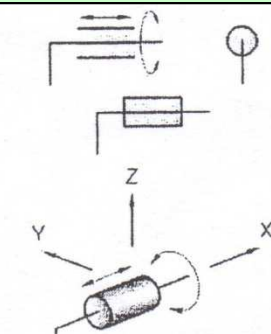


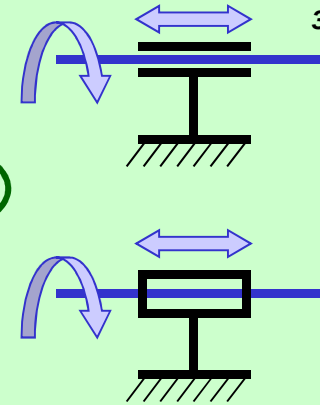
Nombre de degrés de liberté

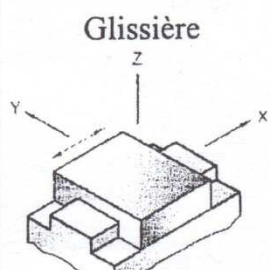
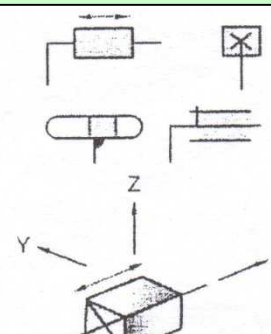
Forme du
torseur cinématique

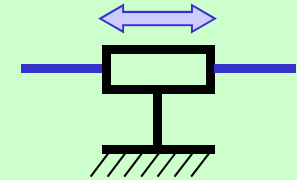
Forme du
torseur statique
ou d'action mécanique
ou des interefforts
ou des efforts transmissibles

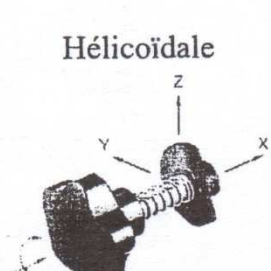
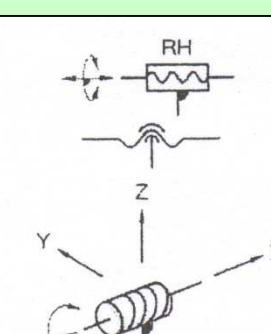


2			Axe $(O, \vec{x})$	$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_P$	$\forall P \in (O, \vec{x})$
---	---	---	--------------------	--	---	------------------------------



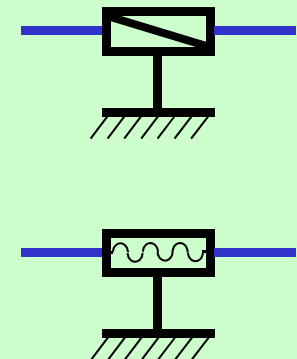
1			Direction $\vec{x}$	$\begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_P$	$\forall P$
---	---	---	---------------------	---	--	-------------



 			Axe $(O, \vec{x})$	$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P$ avec	$\begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_P$ avec	$\forall P \in (O, \vec{x})$ p : pas
--	---	---	--------------------	--	---	---

$$V_x = \pm \frac{p}{2\pi} \times \omega_x$$

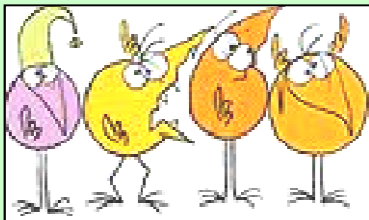
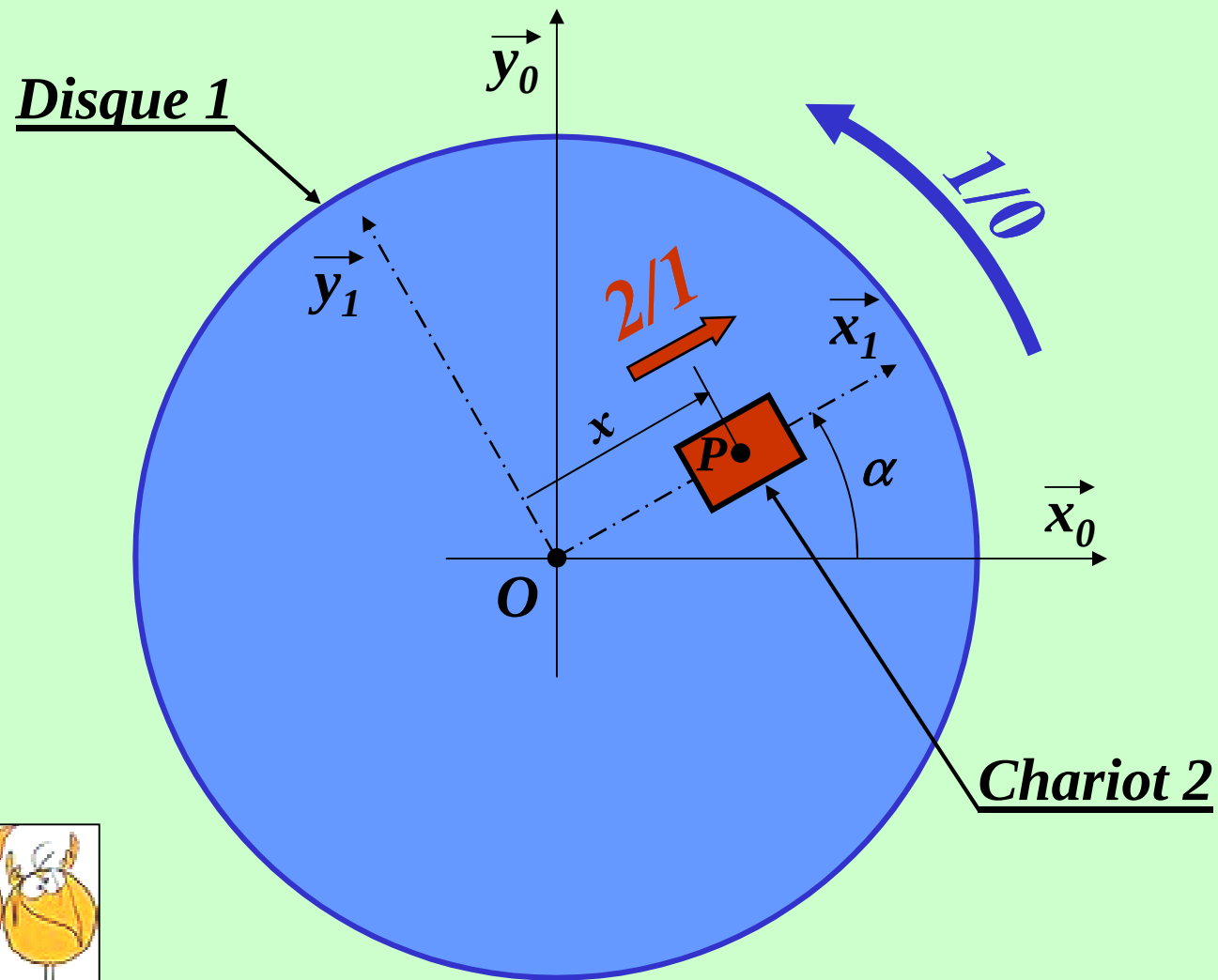
$$L_{12} = \pm \frac{p}{2\pi} \times X_{12}$$



Exemple de calcul de vitesse et d'accélération

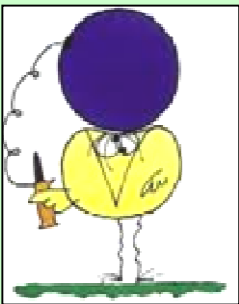
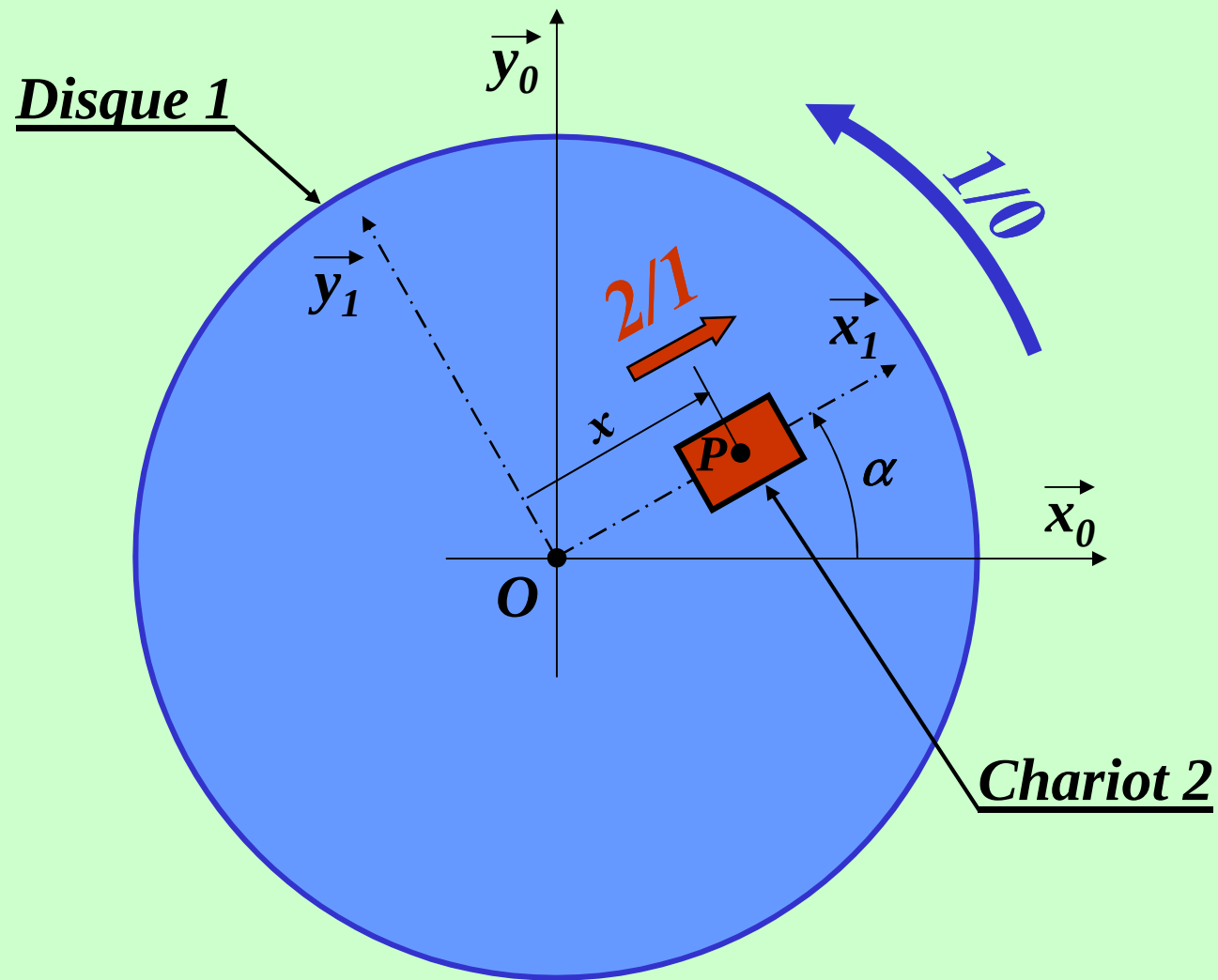


On suppose un disque 1 en rotation en O par rapport au bâti
De plus un chariot 2 peut coulisser radialement sur le disque



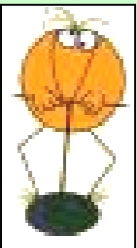
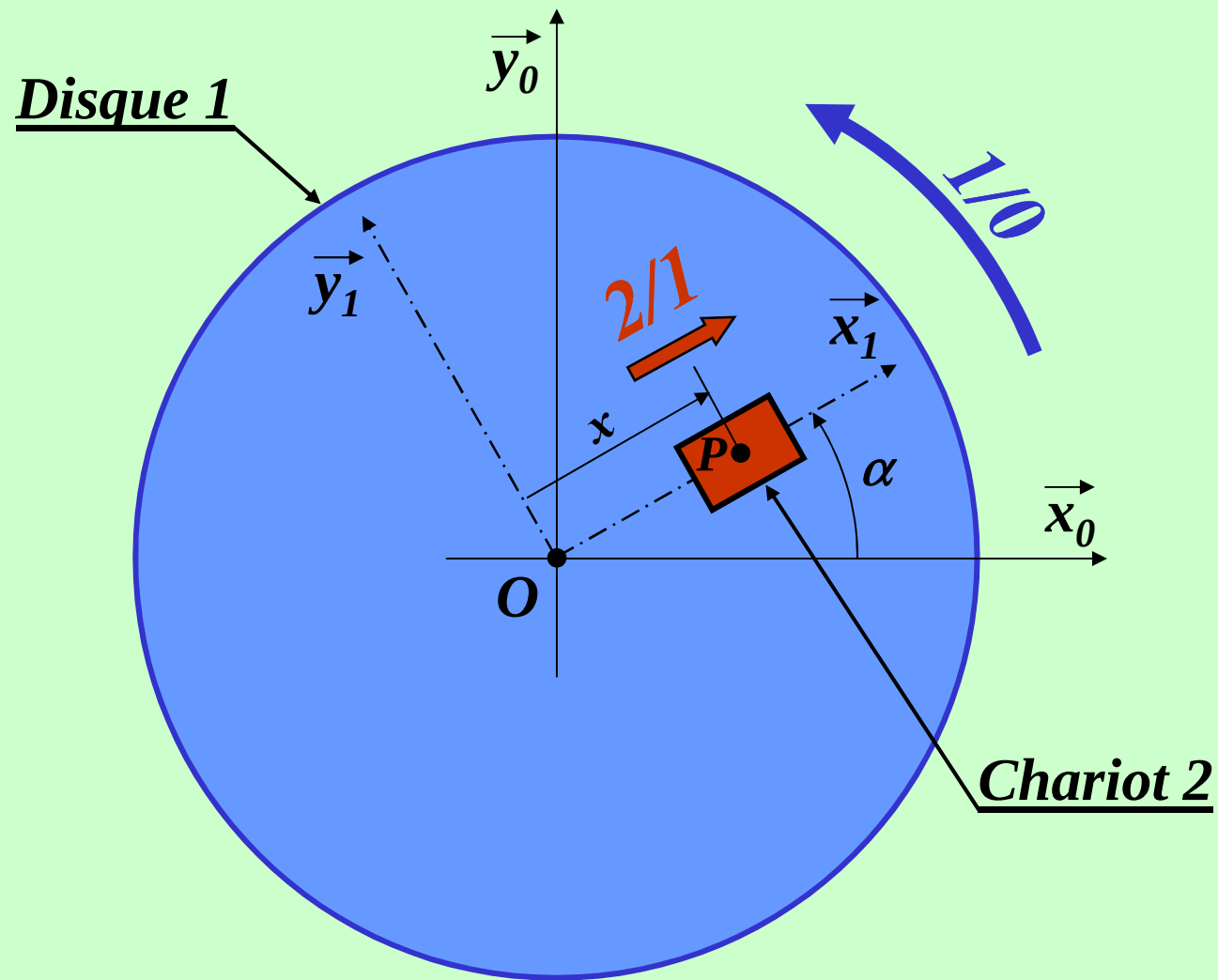
Soit à calculer $\overrightarrow{V}_{P \in 2/0}$ et $\overrightarrow{\Gamma}_{P \in 2/0}$

1^{er} cas: rotation seule du disque ($x = \text{cte} !$)



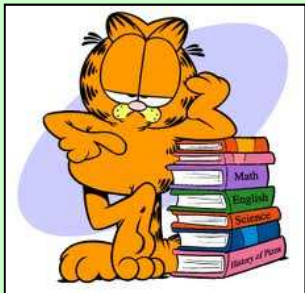
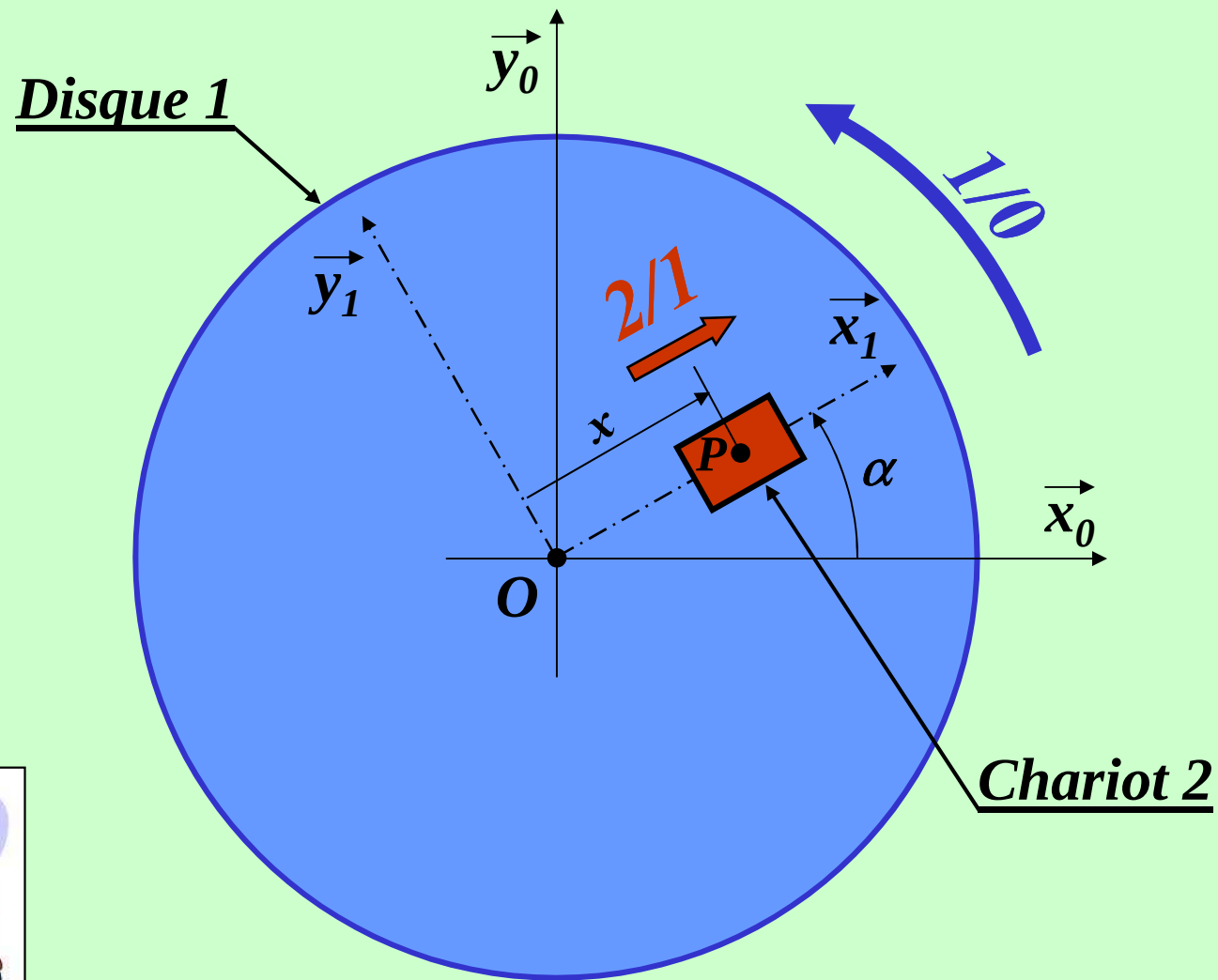
Soit à calculer $\overrightarrow{V}_{P \in 2/0}$ et $\overrightarrow{\Gamma}_{P \in 2/0}$

2ème cas: translation seule du chariot ($\alpha = \text{cte} !$)

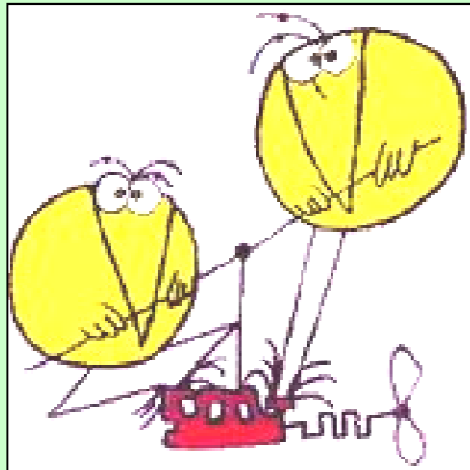


Soit à calculer $\overrightarrow{V}_{P \in 2/0}$ et $\overrightarrow{\Gamma}_{P \in 2/0}$

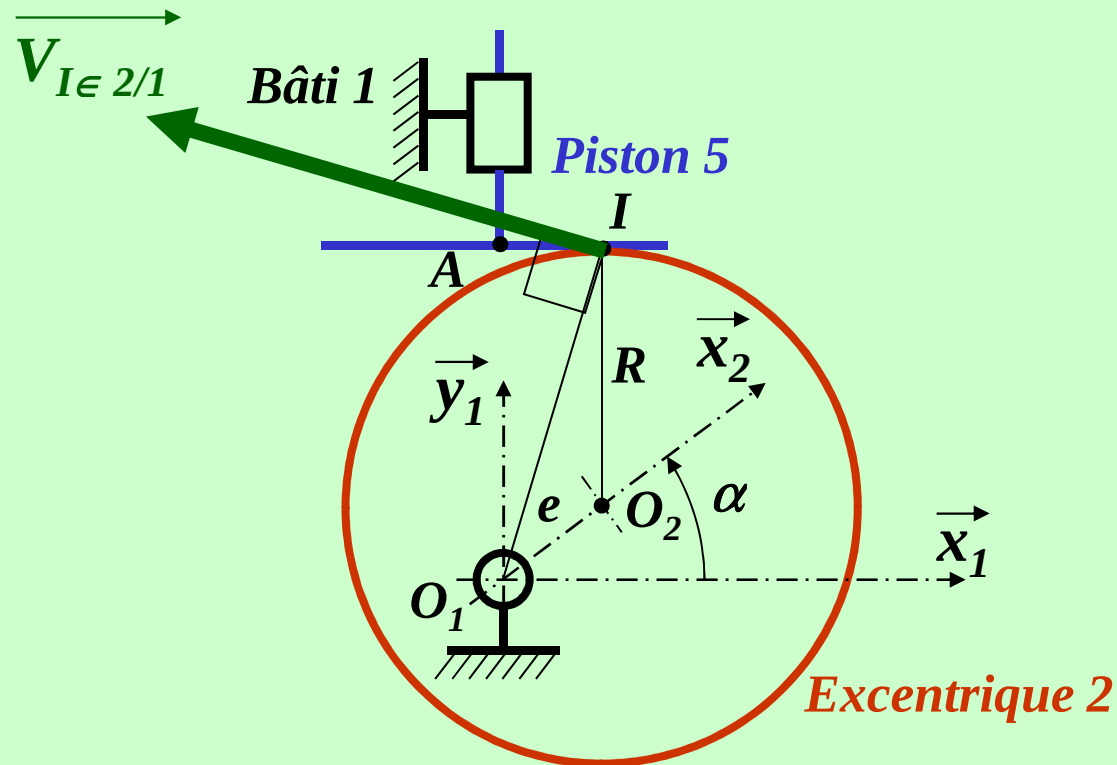
3ème cas: association des deux mouvements (cas général)



Pompe à excentrique



*La rotation continue de l'excentrique 2 entraîne
la translation alternative du piston 5*

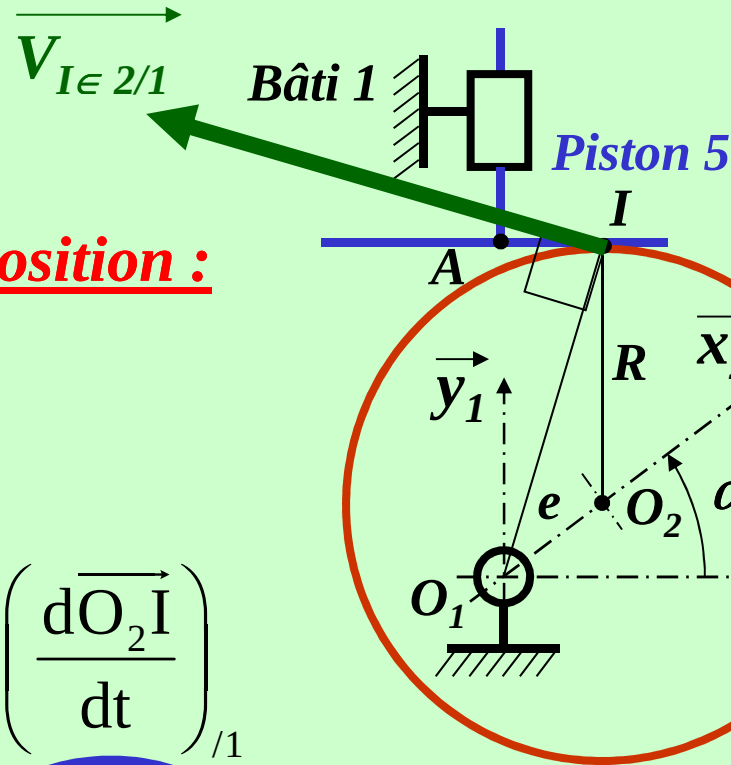


*Mettre en place le vecteur $\vec{V}_{I \in 2/1}$
(prendre une longueur quelconque)*

Calculer $\vec{V}_{I \in 2/1}$



Calculer $\overrightarrow{V_{I \in 2/1}}$



► Dérivation du vecteur position :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{V(I \in 2/1)} &= \left(\frac{d\overrightarrow{O_1 I}}{dt} \right)_{/1} \\
 &= \left(\frac{d\overrightarrow{O_1 O_2}}{dt} \right)_{/1} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_2 I}}{dt} \right)_{/1} \\
 &= \left(\frac{d}{dt} e \vec{x}_2 \right)_{/1} + \left(\frac{d}{dt} R \vec{y}_1 \right)_{/1} = e \dot{\alpha} \vec{y}_2
 \end{aligned}$$



► Changement de point :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{V(I \in 2/1)} &= \overrightarrow{V(O_2 \in 2/1)} + \overrightarrow{IO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = e \dot{\alpha} \vec{y}_2 + (-R \vec{y}_1) \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\
 &= e \dot{\alpha} \vec{y}_2 - R \dot{\alpha} \vec{x}_1
 \end{aligned}$$

FIN