PSI

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

1) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit $\begin{array}{rcl} f_n : [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{n(x^2-4)}{1+n(x+2)} \end{array}$

a) Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $[-2,2]$.

b) Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur tout ou partie de $[-2,2]$.

2) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit $\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2} \end{array}$

a) Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt$.

c) Que peut-on dire de la convergence uniforme sur $[0,1]$?
Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, puis sur $[a,+\infty[$ où $a>0$.

3) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit $\begin{array}{rcll} f_n : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ x & \longmapsto & \left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \longmapsto & 1 & \end{array}$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit $\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}} \end{array}$

Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^1 sur $[-1,1]$ et que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera. f est-elle de classe C^1 sur $[-1,1]$?

5) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit $\begin{array}{rcl} u_n : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{nx^2}{n^3+x^3} \end{array}$

a) Etudier le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

b) Montrer qu'elle est uniformément convergente sur $[0,a]$ pour tout $a>0$.

c) Montrer qu'elle n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$.

d) Montrer qu'elle n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$.

On pourra montrer que si $n \in \mathbb{N}$ *et* $x = 2n$ *alors* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x) \geqslant \frac{n}{4}$.

6) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit $\begin{array}{rcl} u_n : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{n}(1-\dfrac{x}{n}) \end{array}$

Montrer que la convergence uniforme d'une série de fonctions n'exige pas la convergence absolue simple.

7) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{x^2-1}{n(2+x^2)}\right)$. *On pourra utiliser* $n! \sim n^n \,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

8) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2}\arctan(nx)$.

a) Etudier les convergences de la série $\left(\sum u_n\right)$. On note S sa somme.

b) Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

c) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

d) Etudier $\displaystyle\lim_{x\to 0} S'(x)$.

9) Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $r \in \mathbb{R}_+ - \{|z|\}$. On se propose de calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{z - r\,\mathrm{e}^{ix}}$.

a) Vérifier que I est bien définie.

b) On suppose que $r < |z|$. Calculer I en utilisant une série géométrique.

c) Appliquer la même méthode lorsque que $r > |z|$.

10) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit $\begin{array}{rcl} u_n : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \end{array}$

a) Etudier le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$. On notera S sa somme.

b) Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$.

c) Montrer que : $\forall\, x > 0$, $\forall\, k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{\mathrm{sh}(tx)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{\mathrm{sh}(tx)}$.

En déduire, pour $n \geqslant 2$, un encadrement de $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ puis un équivalent de $S(x)$ au voisinage de 0.

d) Calculer la limite de S en $+\infty$.
Adapter la méthode précédente pour trouver un équivalent de $S(x)$ au voisinage de $+\infty$.